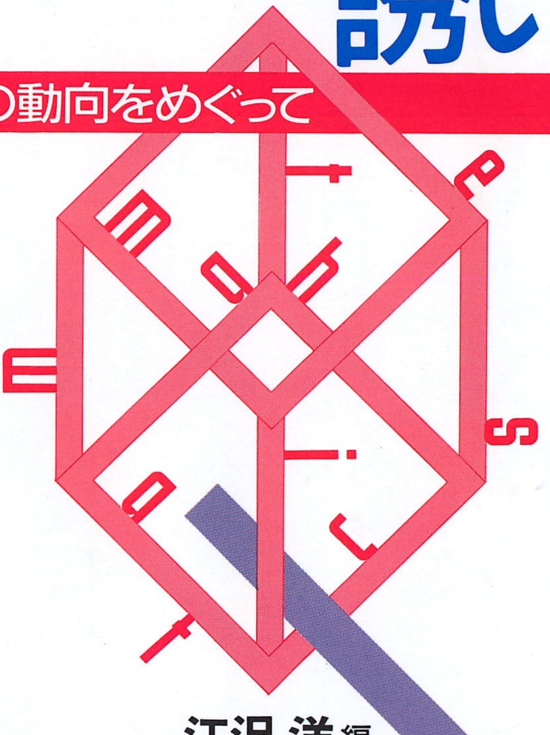
数理物理への誘い

最新の動向をめぐって

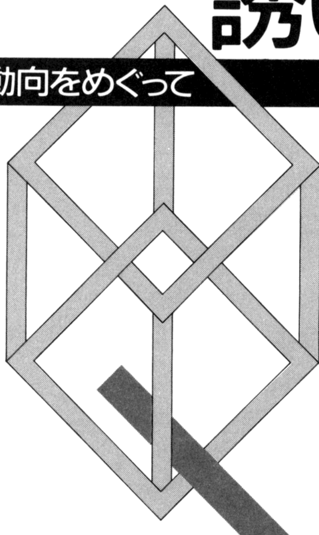


江沢 洋 編

[発行] 遊星社

数理物理への誘い

最新の動向をめぐって



江沢 洋 編

遊星社

目　次

装丁＝海保 透

まえがき

この本は，1987年から学習院大学で開いてきたサマー・スクール「数理物理'nn」における講義を土台にしてできたものです．nnは開催年の後の2桁を表すもので，今年は「数理物理'94」を開くことになります．今日の数理物理学は，物理と数学の交流の場です．物理では，場の量子論における繰り込み理論のように，また確率論から見た相転移のように，背後に精妙な論理構造が隠されていると思われる種々の問題が露頭して，その解明に数学の助けが必要になり，他方，数学では，整備が著しく進んで物理学の要求に応えられるようになったと同時に，なお応えきれない面から新たな発展が始まるようにもなっています．

この現代的な数理物理は，まだ若い学問で，その発展が著しいにもかかわらず，特に日本においては未だ十分によく知られているとはいえません．これは残念なことだ，数理物理の活発な動きを広く伝えなければ，という京都大学数理解析研究所・荒木不二洋教授の熱意から「数理物理'nn」は始まったのです．

以来，毎年（1990年を除く），年が明けると荒木さんとぼくの2人で計画を立て，4人の先生に各90分×3回の講義をお願いします．そのプログラムに研究発表の募集を加えて，春の物理学会と数学会の会場で配り，また『物理学会誌』と雑誌『数理科学』，『数学セミナー』にお願いして広告するのですが，さいわい，日本全国から会場の収容限界である200人近い参加が続いています．

講師の方々には，このサマー・スクールの趣旨を次のように説明して講義のデザインをお願いしています：

> この会では，これから研究を始める大学院生や，数理物理の広い範囲にわたる（この年のテーマに関しては）非専門の研究者を対象にした入門の講義をして下さい．包括的なレヴューではなく，方法あるいは思想とその

有効性がわかるように平易な解説をお願いします.

こうして，このサマー・スクールは数理物理の新しい動きへの入門をめざしているのですが，本書は，入門の入門とでもいいましょうか，より広い範囲の方々，すなわち大学3～4年生から大学院生，高校の数学や物理の先生，そして社会の数学ファンなどに数理物理の現在を大まかに紹介することを目的としています．各講師には，講義で何を言いたかったのか，そのモチーフとエッセンスを，やさしくお話しふうに紹介してくださるようにお願いしました．そして，講義の後の発展にも触れてください，と欲の深い要求を加えたのです．

実は，サマー・スクールの講師の方々には，講義の前に予めその内容を書いていただくことにしています．それを集めた『予稿集』を会の始めに配布するしきたりです．今度の執筆には，それを講義の記録としてご利用いただきました．

かつての講師の方々は，当時も今も研究に教育に活発に活動されている方々ばかりです．折悪しくご都合のつかない時期にあたり，執筆していただけなかった方が多いのも仕方のないこととしなければなりません．さいわい寄せていただくことのできた原稿は，本書の目的をよく実現しています．関連のあるものを集めてまとめ，一応の順序をつけて並べましたが，その順序で読まなければ，ということではありません．むしろ，自由に行ったり来たりしながら数理物理の見物をして，雰囲気を感じとっていただけたらと思います．

第1話「幾何学的描像と非可換の世界」は物理の対象の状態というものの記述法を反省するところから始めて，量子力学が出合うことになった不確定性原理が非可換の世界に導くことを説いています．

第2話「KZ方程式から位相不変量へ」は，物理から現れた微分方程式をめぐりリー群の表現論やトポロジーが絡んでくる興味深い発展を解説します．

第3話「可解格子模型」が扱うのは，たとえば碁盤目の各点に古典的なスピン（値 $+1$ と -1 をとる変数）σ が並んでいて，全体のエネルギーは隣り合うスピ

ンの積の和で与えられるといった系を考え，スピンが熱的に揺らぐときのエネルギーの平均値を計算するという問題です．碁盤目の別名が「格子」，この問題は正確に解けるので「可解」というわけです．平均値を計算するには，あらゆる場合にわたる和をとって場合の数で割ります．この模型で，σ を原子のスピンに，その配列を結晶になぞらえたいのです．目に見える結晶は，無数の原子を含みますから碁盤も無限に大きいとしなければなりません．そのため，ここでは“総和”が大問題になるのです．

第 4 話「確率論から見たスピン系の相転移」は，「可解」をあきらめてスピン配置を現実の 3 次元の場合とし（さらに一般に d 次元として），統計力学的な性質を引き出す方法を探すのです．

第 5 話は「Path Integral 入門」．Path Integral は経路積分ともいい，与えられたポテンシャルの場の中で時刻 t_1 に位置 x_1 にいた粒子が時刻 t_2 に位置 x_2 に移っている量子力学的な確率振幅 $K(t_2, x_2; t_1, x_1)$ を求めるための道具です．ファインマンは，t_1 に x_1 を出発して t_2 に x_2 に至る粒子のあらゆる運動 $x(t)$（古典力学の意味で運動方程式をみたすものも，みたさないものも！ これらを経路と呼ぶのです）にわたってある量を総和すると $K(t_2, x_2; t_1, x_1)$ が得られるといい，総和なるものの計算法も提案しましたが，それは文字どおりの「経路」にわたる和とはいえません．ここでは，その総和（正確には積分）の捉え方を説明しています．

第 6 話「ランダムウォーク表示，臨界現象，場の量子論」では，場の量子論を経路積分で書き表しますが，それができたとして，仮に時間変数を虚数に変換したと考えます．これによって，場を支えていたミンコフスキー時空はユークリッド空間に見えることになり，経路積分が定義しやすくなる．これは第 5 話で説明されたとおりです．このユークリッド空間を格子で近似すると，経路積分は格子上を跳び歩く“ある”ランダムウォークのあらゆる経路にわたる和で近似されます．これで経路積分の様子が目に見えるようになります．数学を使いますと，このように等価性を失わずに視点を自由に変えることができる．これ

が数学のありがたいところです．その自由さは，時空の次元 d を現実の 4 からずらして，考えやすい場合で手慣らしをしながら進むことができるというところにも現れます．実際，$d<4$ で練習している間は快調でした．

格子間隔は計算の後で 0 にしなければなりません．その極限で連続なユークリッド空間の場合にもどることを確かめるのです．この方法を，$d=4$ として，いわゆる φ^4 の模型に応用しますと，なんと格子間隔を 0 にする極限で相互作用が消えてしまうらしい．“らしい”というのは，未だに完全な証明ができないからです．d が 4 より少しでも大きければ証明は完全です．そのほかにも強い徴候が現れているので，結果に間違いはなかろうと多くの人々が考えています．もし間違いなければ，これは大きな意味をもつ問題です．というのは，この φ^4 模型は，4 次元時空におけるボーズ型の場のうちで繰り込み法が適用できる唯一のものだからです．もう一つの繰り込み可能な模型である量子電磁力学でも同じという徴候も指摘されています．こうして，場の量子論は自身で模型を制限するらしい．残る可能性は，ヤン - ミルズ型のゲージ理論です．

第 7 話から第 9 話までの主題は量子群です．量子力学を少しでも学んだ読者は，スピンの演算子 $\boldsymbol{s}=(s_x, s_y, s_z)$ が

$$s_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad s_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad s_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

で与えられることをご存知でしょう．ただし，$\hbar$（プランク定数/2π）を 1 とおきました．これらは交換関係

$$[s_x, s_y]=is_z,\qquad [s_y, s_z]=is_x,\qquad [s_z, s_x]=is_y$$

に従います．あるいは，$s_\pm=(s_x\pm is_y)/2$ を定義して

$$[s_+, s_-]=2s_z,\qquad [s_z, s_\pm]=\pm s_\pm \tag{1}$$

としても同じことです．これらから

$$U_x(\theta) = e^{is_x\theta} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & i\sin\dfrac{\theta}{2} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad U_z(\varphi) = e^{is_z\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

を定義しますと，これらは行列式が 1 のユニタリ行列ですから，それらの積

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) := U_z(\varphi_1)U_x(\theta)U_z(\varphi_2) \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varphi_2 \leqq 4\pi)$$

もそうで，これらは群をなします．これが $SU(2)$ です．

これに対する量子群 $SU_q(2)$ は，複素数 q をとって交換関係（1）を

$$[J_+, J_-] = \frac{q^{2J_z} - q^{-2J_z}}{q - q^{-1}}, \qquad q^{J_z}J_\pm q^{-J_z} = q^{\pm 1}J_\pm \tag{2}$$

に変えて定義されるのです．これらは $q \to 1$ とすれば（1）に戻りますから，$SU_q(2)$ は，しばしば $SU(2)$ を歪めたものといわれます．一般に，量子群は対応する古典群を“歪めたもの”といえます．古典群のこうした拡張であることが量子群という名の由来かもしれません．1991 年に北京の応用数学研究所を訪問したとき，特にお願いして学生さんたちの研究発表会をしてもらったのですが，ほとんどすべてが量子群を研究していたのには驚きました．楊振寧 (C. N. Yang) 先生が重要性を指摘されたのだそうです．この種の群には，本書に語られている応用のほかに，二原子分子の非調和振動など量子力学の種々の問題で見えなかった対称性が見えてくる場合があるという報告もありました．

第 10 話は「拘束系の力学とホモロジー」．拘束系とは，球面上を滑る質点のようなもので，この場合，質点は球面に拘束されている．単振子なら円弧上に拘束されている．場の理論でも，拘束はしばしば問題になります．そうした運動を量子力学で扱うにはどうしたらよいだろうか？ ここでの問題は，古典力学の形をとっていますが，実はここから始まったのでした．

第 11 話「ウェーブレット解析」は，問題によってはフーリエ解析にとってかわる新しい道具です．フーリエ級数は，どこまでも同じピッチで振動を続ける

三角関数で与えられた関数 $f(t)$ を展開するので，地震波がどんな周期の固有振動に共鳴をおこすかなど大局的な性質を見るには適していますが，どんな性質のショックを建物や人に与えるかを論じるのには適しません．ウェーブレット解析は，局在化した関数 $\psi(t)$ の系列 $\left\{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\middle| a,b\in\boldsymbol{R},\ a\neq 0\right\}$ で $f(t)$ を展開します．与えられた問題に応じて関数 ψ をうまく選ぶのが腕の見せどころでしょう．今後ますます重要になると思われるこの方法を，わかりやすく紹介していただいたのは，ありがたいことでした．

終わりに，本書の企画に賛同して原稿を寄せてくださった先生方に心からお礼を申し上げます．毎年，数理物理サマー・スクールに参加して熱心に聴講し，本書を稔らせてくださった遊星社の西原昌幸さんに感謝します．

1994年5月

江沢　洋

幾何学的描像と非可換の世界

大森英樹

1°「関数」ってなに？

高校数学でも，受験数学でも，数学のなかにはよく「関数」（昔は函数と書いていた）という言葉が現れます．これは英語の function の訳語なのですが，英語の辞書を引いてみますと，function の第一義は「機能」となっていまして，最後のほうに「数学用語で関数」と書かれています．

文字を見ているだけでも，これはなにやら古い歴史のある用語だとは想像がつきますが，一体これはどういうものなのでしょうか？

おそらく，読者が学校で習った「関数」というものは「互いに関係しあって変化する量」として登場し，x が変化するにつれて y も変化し，互いの変化が一方が他方の変化に依存して決まるように見えるとき，x と y との間には「関数関係がある」と述べるのだと教わってきたはずです．しかし，このように述べてみるとそこには，function の第一義であった「機能」という意味あいがまったく登場していないこともわかるでしょう．どうして，こんなものを「機能」と呼ぶのでしょうか？

「関数」という用語も，昔は「機能」という意味が確かにあったのです．しかし，読者が習ってきた関数というものには「機能」という意味あいがあったでしょうか？

どうして，このように変わってしまったのでしょうか？

たぶんこのことについては，日本の数学教育に関して，多くのことが言われなければいけないと思います．今のところ言えることは，このように変化して

しまったのは決してよいことでも，そのために数学の本質がよくわかるようになったということでもないということだけなのです．

現在，この関数の概念が大きく変化しようとしております．その方向は，まさしく，「機能」としての関数の概念の復権なのです．

それは一体，どういうことなのでしょうか？ 私のこの一文はそれを説明しようとするものであります．

2° 古典力学の定式化と，基礎にしている仮説

話は古典力学から始めないといけないと思います．これは，19世紀末までにきわめて精密に完成され，我々の思考形式の深いところまで浸透しているもので，自然現象に関するほとんどすべての理論は（宗教的だったり超自然的なものを除外して）古典力学を基礎にして書かれています．

ここで古典力学と申しますのは，おなじみのニュートン力学を出発点とし，最小作用の法則とか変分原理のような，いささか神学的な理論を経て，一般力学系の理論にまで高められたものを指します．

この理論は，ユークリッドの幾何学がいくつかの無定義語さえ認めてしまえば五つの公理系だけから出発できるように，いくつかの力学的用語を無定義のまま使ってしまうならば，ほんのわずかの公理系にまとまってしまうようなものなのです．

まず，この公理系にあたるものを書き出してみましょう．（難しい用語が出てきますが，気にする必要はありません．）

（I）　力学系の「状態」は「相空間」内の一点として表わされる．相空間は状態を表わす点の集まりである．

（II）　相空間は，シンプレクティック多様体である．

（III）　各力学系に対し，相空間上の関数 H が対応している．H をこの力学系のハミルトン関数と呼ぶ．

（IV）「状態」の時間変化は，ハミルトン関数から決まる，ハミルトン・ベクト

ル場の積分曲線として表わされる.

難しい用語が並んでしまいましたが，ここでは（I）しか問題にしませんから，他のことは忘れてしまってかまいません.

力学系，たとえば車のエンジンのようなものを想像しますと，これは各瞬間瞬間でめまぐるしくさまざまな状態にあると想像できるわけですが，その状態は全体としては相空間というものを作っており，その相空間は点の集まりと理解できるもので，したがって，各瞬間の状態というのは相空間という空間内の一点として理解できる，というのが（I）で述べていることです.

車のエンジンで言えば，各ピストンの位置とかバルブの開き具合，注入されつつある混合ガスの濃度，点火プラグの火花の濃度，ラジエーターの水温といったさまざまな数値の集団が，その瞬間でのエンジンの状態なのだろうが，（I）で述べていることは，ともかくこういうものであっても各状態を「点」として考えてしまってもよいと言っているわけです.

これは一見あたりまえのことのように思われる仮説です．百歩譲ってこれを疑ってみたところで，「じゃあ，他にどういう考え方があるか」と問われれば何も答えられないのだから，（I）のような考え方は「数学的記述を可能ならしめるために行なう必要悪」と受け取られていたことは確かです.

3° 写像としての関数と可換環

しかし，（I）のような考え方は関数というものの考え方に影響をもつのです．たとえば，「3番目のピストンの位置」といったような，各状態に付随して決まる数値を想像してみてください．これは，力学系の各状態に付随している数値ですから，相空間の各点に付随した数値と述べてよいわけです．ちょっと昔の言い方では，これを相空間上の関数と呼ぶのですが，上のように述べてしまいますと，相空間上の関数とは，相空間の各点に対し数を対応させる対応のこと

だということになります.

各状態で観測される観測値のようなものは，上のような意味で，相空間の各点に数値を対応させる「写像」のことだと理解されるわけです.

昔は「機能」という意味を色濃くもっていた「関数」が（I）のような考え方の影響を受けて「写像」という意味に変化していったのです．そして，その底には,

「どんなものでも，それの基本的構成要素は点であり，点の集まりとして理解できる」

という考え方が潜んでいるのです.

さて，ある力学系の相空間を一つ想像し，それを M で表わしましょう．状態は M の点なのですから，それを $p\in M$ のように表わすことにします．これは,「状態 p は M の点である」という意味で使う記号です.

これとは別に，実数全体を表わす記号として $\boldsymbol{R}$ を用意します．すると,「各状態に付随して決まる数値」というのは，各 $p\in M$ ごとに決まる数値ですからこれを $f(p)$ と書くと，記号 f のほうは，M から $\boldsymbol{R}$ への写像

$$f:M\to\boldsymbol{R}$$

のことだということになります．f という記号が写像を表わすと考えられるのですが，f はたとえば「3番目のピストンの位置」を表わしてもいますから，なにか観測といったものを表わしているとも考えられます．f というものを観測すると，その値が $f(p)$ だというわけです.

M を点の集まりだとする考え方は，写像としての関数という考え方を生み，さらにそれは観測という考え方にも影響しているのです．つまり,

「観測とは M から $\boldsymbol{R}$ への写像のことである」

となります.

さて，相空間 M から $\boldsymbol{R}$ への写像 f, g を考えてください．この f, g から次のような別の写像を作ることができます：

(i) a, b を実数として，$p \in M$ に対して $af(p)+bg(p)$ を対応させる写像，これを $af+bg$ と書く．

(ii) $p \in M$ に対して $f(p)g(p)$ を対応させる写像，これを $f \cdot g$ と書く．

$\mathcal{M}(M)$ を M から $\boldsymbol{R}$ への写像の全体とすると，f, g が $\mathcal{M}(M)$ の元（これを $f, g \in \mathcal{M}(M)$ のように書く）だとすると，$af+bg$ も $f \cdot g$ も $\mathcal{M}(M)$ の元だということになります．実数の積については，$x \cdot y = y \cdot x$ ですから，これを使うと，$f \cdot g = g \cdot f$ であることがわかります．さらに次のようなこともすぐにわかるでしょう：

(a)　$(af) \cdot g = a \cdot (f \cdot g)$

(b)　$f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$

このような $\mathcal{M}(M)$ のことを数学では環と呼びますが，特に $f \cdot g = g \cdot f$ なので，このようなものを **可換環** と呼びます．

よく考えてみますと，この可換性は実数が積に関してもっている可換性に起因しています．したがって，この可換性は，関数というものを M から $\boldsymbol{R}$ への写像と考えるということに起因していることがわかります．

4° 不確定性原理

観測ということと写像としての関数というものが同じものであると考えるのが，古典力学が基礎にしている仮説であると述べたのですが，「観測」というものもよく考えると不可解なところがあります．

選挙のときなどよく言われることですが，一般に選挙結果の予測や予備のアンケート調査などを行なうと，そのことが実際の選挙結果に影響を与えてしまうらしいということです．

こういうことは，コップの中の熱湯の温度を計ろうとして，冷凍庫で冷やした温度計をコップの中につっ込んだ場合などにも起こることで，程度の差はあ

るものの，対象になんの影響も残さないで観測を行なうことはできないのです．

古典力学では，観測することによって対象に与えてしまう影響は，観測技術を改良していけば限りなく小さくできるものと考えられております．これは古典力学が暗黙に認めている仮説のようなものですが，前節で述べました「写像としての観測」などもこういう古典力学的観測のことだと理解してよいと思います．

ところで，量子力学の基本的原理の一つと考えられているものに「不確定性原理」と呼ばれるものがあります．これは，古典力学のときとは違って，どんなに観測技術が進んでも，観測が対象物に与えてしまう影響を限りなく0に近づけることなどできなくて，ある原理的な限界があるのだとする考え方です．

観測というものは対象物にある微小な変化を生じさせその変化を測定するものなのですが，このことをもう少し詳しく述べてみましょう．

ある状態 p にある力学系に f という観測値 $f(p)$ を得たとします．しかし，この観測を行なったために状態のほうは，p から $p+\delta p$ に変化したとします．実際にはこの微小な変化 δp は知ることはできません．古典力学ではこの δp は無視できるほど小さいのだと考えています．

問題は f という観測に続けて g という観測を行なった場合です．この場合の観測値は

$$(f(p),\ g(p+\delta p))$$

という実数の組になりますが，これは，$(f(p), g(p))$ ではありません．つまり，g という観測で得た結果は，なにか別の理由から $g(p+\delta p)=g(p)$ だということがあらかじめわかっている場合を除けば，p という状態での g の値ではないのです．

実は，観測というもののこういう性質をつきつめていゆくと，案外多くの g で $g(p)=g(p+\delta p)$ となっていることが結論できるのですが，f と正準共役関係と呼ばれる関係にある g については，$g(p+\delta p)\neq g(p)$ となってしまうことがわかるのです．

これだけの話であるならば観測というものをもっと精密に見ていけばなんと

かなるように思えるかもしれません．

しかし，話はそう簡単ではありません．「観測というものを精密に見る」と言っても，それはやはり観測によってそうするしかないはずです．

5° 非可換環

f とか g とか述べてきたものは古典力学のなかでは何かの観測に対応しているものでしたし，数学的にはこれは相空間 M から $\boldsymbol{R}$ への写像としての関数のことでした．

しかし，不確定性原理を原理として認めてしまうと，もうこのような考え方はできなくなってしまいます．古典力学では f という観測が引き起こす状態の乱れ δp は限りなく小さくできると考えており，したがって，ある状態 p に対し，観測 f と観測 g とを続けて行なって，$(f(p), g(p))$ という数値が得られると考えており，そういうことができる結果として，新しい観測 $f \cdot g$ は，行なってみるまでもなく $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$ だと考えられてきました．

不確定性を原理として認めてしまうと，上の考え方は捨てなくてはいけないのです．

古典力学では相空間を点の集まりだと考えてきました．そして，その結果 $\mathcal{M}(M)$ は可換環となるのだと前に説明しました．$\mathcal{M}(M)$ というのは M から $\boldsymbol{R}$ への写像全体のことでしたが，これを M 上で行なえる観測の全体と呼んでもよいでしょう．

実は，話は逆方向から始めることもできるのです．

まず，古典力学的に，

「対象になんの影響も残さずに観測ができる」

とします．この散文的な述べ方を数学的にちゃんと述べてみると，

「観測の全体は可換環をなす」

という述べ方になり，その結果として，

「状態の空間 M は点の集まりで，観測というのは M から $\boldsymbol{R}$ への写像である」

という順序で述べることができるのです．

ですから，不確定性を原理として認めてしまうということは，同時に，相空間は状態という点の集まりであるとする考え方を捨てることを意味します．そして，それは M 上で行なうことのできる観測の全体（これは古典力学では $\mathcal{M}(M)$ のことであった）をどのように考えるべきかということに影響してきます．

物理を考えるのであれば何らかの力学系を考えるのは当然のことですし，それに何らかの観測を行なうのも当然のことです．話を簡単にするために，この力学系に対して行なうことのできる観測の全体というのを想像し，それを $\mathcal{M}$ と表わすことにします．古典力学では一つの力学形に対して相空間 M を考えて，$\mathcal{M} = \mathcal{M}(M)$ と思っているのですが今はその立場はとりません．

$\mathcal{M}$ にはどれくらいのことが許されているのでしょうか？　ここからは，理論を作っていくときの考え方の違いでさまざまな考え方があるのですが，不確定性原理をうまく取り込み，しかも古典力学のよさもなるべく失わないようにするため

「$\mathcal{M}$ はある非可換環である」

とする点ではみな一致しています．

話の都合上，非可換環というものを説明しなければなりませんが，これは前に述べた $\mathcal{M}(M)$ の諸性質のうち可換性だけを失ってしまったようなもので，こういうものの典型的な例としては2行2列の行列の全体といったものがあげられます．

6° 古典近似と描像

さて，我々はある力学系で行なえる観測の全体として $\mathscr{M}$ なる非可換環を想定しました．これは不確定性原理を取り込むためでした．しかし，これだけではなにも始まりません．理論を進めるためにはなにか別の指導理念が必要なのです．

そこで，次のような考え方を持ち出してきます．

> そもそも，古典力学であれ量子力学であれ，それは我々が大自然という一つのものから抽出し得たものであるはずなのだから，それが見かけ上どんなに違って見えようとも，それは本来一つのものの表と裏，あるいは一方が他方の別の側面といった関係になければならない．

こういう考え方を，古典力学と量子力学とにあてはめますと，量子力学という理論のなかに入っているパラメーター h（プランク定数）を限りなく 0 に近づけるならば，その極限として古典力学が得られるという関係がなければ困るという結論が得られます．

h を 0 に近づけるといっても，単純に $\lim_{h\to 0}$ を考えるという意味ではなく極限のとり方にも工夫がいるのですが，ともかく，理論のできてきたいきさつ等を考えれば，「古典力学は量子力学をマクロに見たときに得られる」という関係になっていてほしいわけです．

このようにして，$\mathscr{M}$ が古典力学での $\mathscr{M}(M)$ とどのようにつながっているべきかということが得られます．これは大切なことなのです．

我々は $\mathscr{M}$ についてあれこれ直観的に述べるわけで，たとえば「原子核のいちばん外側を回っている電子の軌道」などという言い方をします．これはイメージがはっきりする述べ方ではありますが，言葉が全部古典力学で使っている言葉，つまり $\mathscr{M}(M)$ での言葉になっていることに注目してください．

古典力学，つまり $\mathscr{M}(M)$ の中での言葉は直観的にきわめてわかりやすくでき

ております．これは，古典力学が我々の素朴な直観を基礎にしているせいでもありますが，そのように述べるよりは，古典力学は非常に長い歴史をもっていて，我々はむしろ古典力学に合わせて自分の直観を磨いてきたせいだと述べるほうがよいようです．

我々は子供のころから陰に陽に古典力学的な感覚を訓練されて育っており，それゆえに数学的表現方法はなにも知らなくても，「打球の落下地点に走っていって身構える」とか，「雪の斜面で，スキーをはいて重心をどう移すとどうなるか」などということをたくさん知っているわけです．

我々は古典力学をいわば「体で」知っているわけです．ですから，こういうものを利用して，きちんとした数学的表現を使わないでも，イメージのほうはうまく伝えることができるのです．我々はこういうものを「描像」と呼ぶのです．

「描像」というのは，我々が体でわかってしまうものを基礎にしているのです．このことは「描像」というものは古典力学を基礎にして成り立っていると言ってもよいかと思います．

$\mathcal{M}$ と，$\mathcal{M}(M)$ との関係がわかるということは，$\mathcal{M}$ の中でのことがらを，あたかも $\mathcal{M}(M)$ の中でのことがらのような描像を借りて表現できることを意味します．前に述べた「いちばん外側の電子の軌道」などもそういう描像なのです．ですから，たとえば，「1個の電子が二つのスリットを同時に通過する確率」などという言葉が出てきても，それを矛盾だと決めつけるわけにはいかないのです．

7°　局所化，局所生成元

「点」という描像はよく考えてみますときわめて古典力学的なものだということがわかります．しかし，我々はギリシャの昔からこの描像にすがってさまざまのものを構築してきたのです．とくに幾何学はこの描像と切っても切れない関係にあります．

「点とは，位置のみあって，大きさのないものである」

この古い素朴な描像を頼りにして我々は「空間」という描像，連続体という描像，ひいては実数連続体という描像を作りあげ，その上に微積分学を積みあげて今日に至っているのです．

事は重大で，我々はきわめて注意深く言葉を作っていかなければならないところに来ているのです．

細かいことは述べられませんが，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}(M)$ との関係がはっきりしますと，$\mathcal{M}$ という非可換環を M の開部分集合 U に「局所化」して考えることができるようになります．このようにして得られる非可換環を $\mathcal{M}_U$ と書くことにしますが，M とか U とかいうものは古典力学的な点描像を使わないと述べられないものであることに注意してください．「局所」などという場所に関係する言葉を点描像なしに述べることは不可能なことなのです．

$\mathcal{M}_U$ は非可換環なのですが，U のとり方はさまざまありますから，$\mathcal{M}_U$ というのは U ごとにさまざまあるわけで，そういう局所化された $\mathcal{M}_U$ のほうだけ見ていてもいろいろな U で考えれば，全体の $\mathcal{M}$ はわかるようになっております．

さて，十分小さな U をとり $\mathcal{M}_U$ を考えましょう．これは「遠くのほうの影響を無視する」といった意味あいです．こうすると物事は少し簡単になります．たとえば，

> 「$\mathcal{M}_U$ の中に $x_1, \cdots, x_n$ という元があって，他の元はすべて，$x_1, \cdots, x_n$ に $x_1{}^2x_2{}^3+3x_2{}^3x_3{}^2x_2$ といった代数的演算を行なうか，またはそういうものの極限として表わされる」

といったことが起こります．この場合，$\mathcal{M}_U$ は非可換ですから，一般には $x_1 \cdot x_2 \neq x_2 \cdot x_1$ です．だから，$x_1x_2x_1$ などは $x_1{}^2x_2$ と書いてはいけません．

$(x_1, \cdots, x_n)$ のことを $\mathcal{M}_U$ の生成元と呼びますが，これを「$\mathcal{M}$ の局所生成元」と呼んでもよいでしょう．局所生成元の選び方はたくさんありますが，ともかく，どんな $f \in \mathcal{M}_U$ であっても

(☆)
$$f = \frac{1}{5}x_1 + 3x_2x_1^2 + x_1^3x_3 + \cdots$$

のように $x_1, \cdots, x_n$ を使って書くことができるとき，$(x_1, \cdots, x_n)$ を生成元と呼ぶわけです．

8° 機能としての関数

上の（☆）を考えてください．f を $f(x_1, \cdots, x_n)$ と書きたくなりませんか？しかし，この f は $x_1, \cdots, x_n$ の関数なのでしょうか？ f は写像ではなく，$\mathcal{M}_U$ の元にすぎません．$x_1, \cdots, x_n$ も変数ではなく，$\mathcal{M}_U$ の元にすぎません．（☆）は f を，生成元 $(x_1, \cdots, x_n)$ を使って表示したときの「表示」でしかありません．

しかし，（☆）という式は生成元 $x_1, \cdots, x_n$ にどのような操作を行なうと f が得られるかという手続きを表わしております．その意味でならば（☆）の右辺は機能を表わしていると言ってもよいでしょう．

$\mathcal{M}_U$ を数学的に書くために，我々はこういう意味での関数の概念を要求されているのです．

そして，こういう関数概念を使ったときに，我々の描像のほうをどう変えていかなければならないかという問題に直面しているのです．

これは，ギリシャの数学以来，人類がかつて疑ったことのない「点」の概念の変革を意味します．そして，それゆえに，決して数学のなかだけには納まらない大問題を含んでいるのです．

どういう言葉と描像を用意すれば，この危険な橋を渡ることができるのでしょうか？

第2話

KZ方程式から位相不変量へ

— リー環，微分方程式，トポロジーの接点 —

河野俊文

共形場理論を契機として，この数年，トポロジーにおける新しい手法が開発されつつある．ここでは，Knizhnik - Zamolodchikov (KZ) 方程式をテーマとして，表現論，微分方程式とトポロジーのかかわりを解説したい．

KZ方程式が登場した背景を少し述べておこう．共形場理論は，1980年代半ばに [BPZ] によって，2次元統計力学模型における臨界現象をあつかう場の理論としてあらわれた．臨界点における，ビラソロ代数とよばれる無限次元リー環の対称性に注目して，これまで，モデルを厳密に解くことによって，はじめて計算されたさまざまな量を，ビラソロ代数の表現論からくる制約によって，みごとに予見した．その後，共形場理論は，超弦理論とも関連して，発展した．

KZ方程式は，Wess - Zumino - Witten (WZW) 模型から構成される共形場理論における，相関関数のみたす微分方程式として，[KZ] において，導入された．

WZW模型とは，およそ次のようなものである．Σ を閉じたリーマン面，G をリー群 $SU(2)$，k を整数とする．写像

$$g : \Sigma \to G$$

に対して，作用 $S_\Sigma(g)$ を

$$S_\Sigma(g) = -\frac{\sqrt{-1}k}{4\pi}\int_\Sigma Tr(g^{-1}\partial g\, g^{-1}\bar{\partial} g) - \frac{\sqrt{-1}k}{12\pi}\int_B Tr(g^{-1}dg)^3$$

で定める．ここで，B は $g(\Sigma)$ を境界とする G 内の3次元多様体で，写像 g は B に拡張して考える．2番目の項が，WZW項とよばれるもので，B をとりかえても $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍しかずれないことがわかる．WZW模型は，$\exp(-S_\Sigma(g))$ をすべての g に関して"積分"することによって構成される．

やはり1980年代半ばに，ジョーンズによって，新しい結び目の不変量が，発見された．KZ 方程式の解の構造の研究が進むにつれて，ジョーンズの不変量は，KZ 方程式のモノドロミー表現からも定義されることが，明らかになった．さらに，モノドロミー表現の代数構造が，量子群によって統制されていることが発見された．

KZ 方程式のモノドロミーは，球面上の点の動きを記述する組みひもの行列表現を与え，ジョーンズによる結び目の不変量につながっていくわけである．このような構成を，リーマン面上で展開することによって，リーマン面の変形の族としての，3次元多様体の位相不変量の構成にまで発展させることができることを示唆している．これは，その後の研究の方向の指針となっていく．

ここでは，KZ 方程式の数学的な構造を主にして述べよう．上に少し述べた物理的背景については，[KZ]，[TK] などを参照されたい．まず，リー環 $sl(2, \boldsymbol{C})$ の表現から始めて，KZ 方程式を書き下す．そして，KZ 方程式の解が，どのように，超幾何関数と関連するか，なぜジョーンズの不変量が得られるのかなどを述べよう．最後に，バシリエフによる，結び目全体の空間の幾何の観点にふれ，KZ 方程式を用いると，さまざまな幾何的不変量の積分表示が得られることを解説する．

1° KZ 方程式と超幾何微分方程式

◆リー環 $sl(2, \boldsymbol{C})$ とその表現◆

まず，リー環 $sl(2, \boldsymbol{C})$ について主な性質を復習しよう．$sl(2, \boldsymbol{C})$ とは，2行2列の複素行列でトレースが0になるもの全体で

$$[X, Y] = XY - YX, \qquad X, Y \in sl(2, \boldsymbol{C})$$

によって，リー環の構造を入れる．複素線型空間としては，$sl(2, \boldsymbol{C})$ は3次元で

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が，その基底をなす．これらは，交換関係

$$[H,E]=2E, \quad [H,F]=-2F, \quad [E,F]=H \tag{1.1}$$

をみたしている．

半整数 $j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$ に対して，次のように $sl(2,\boldsymbol{C})$ の表現空間 V_j ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$) を構成する．$V_j$ は，基底 $v_0, v_1, \cdots, v_m$ ($m=2j$) をもつ $2j+1$ 次元の複素線型空間で，$sl(2,\boldsymbol{C})$ の基底 H, E, F の作用が

$$H(v_k)=(m-2k)v_k, \quad F(v_k)=v_{k+1}, \quad E(v_k)=k(m+1-k)v_{k-1}, \quad k=0,1,\cdots,m \tag{1.2}$$

で定められている．ここで $v_{-1}=0$ とおいた．とくに，$E(v_0)=0$ としている．これを線型に拡張することにより，関係式 (1.1) と矛盾なく，$sl(2,\boldsymbol{C})$ の任意の要素の作用が定義される．

◆表現のテンソル積◆

二つの表現空間 V, W のテンソル積 $V\otimes W$ について $sl(2,\boldsymbol{C})$ の作用を

$$X(v\otimes w)=(Xv)\otimes w+v\otimes(Xw), \qquad X\in sl(2,\boldsymbol{C}),\ v\in V,\ w\in W \tag{1.3}$$

によって定める．このようにして，2 個の表現空間のテンソル積を，また $sl(2,\boldsymbol{C})$ の表現空間とみなす．3 個以上の表現空間のテンソル積についても同様である．

例として，$V=V_{1/2}$ について，テンソル積 $V\otimes V$ を考えてみよう．

	H の固有値
$v_0\otimes v_0$	2
$E\uparrow$	
$F(v_0\otimes v_0)=v_1\otimes v_0+v_0\otimes v_1$	0
$E\uparrow$	
$F^2(v_0\otimes v_0)=2v_0\otimes v_0$	-2

の 3 個のベクトルではられる $V\otimes V$ の部分空間は，それ自身 $sl(2,\boldsymbol{C})$ の表現空間となっている．これらのベクトルへの $sl(2,\boldsymbol{C})$ の作用を調べてみると，この表現空間は，先に定義した V_1 と同一視できることがわかる．これは，$V\otimes V$ の対称テンソルのなす部分空間ともみなせる．同様に，反対称テンソルのなす部分空間を考えると，V_0 が得られる．

このようにして，$sl(2,\boldsymbol{C})$ の表現空間としての分解

$$V \otimes V = V_0 \oplus V_1$$

が得られた．これを繰り返していくと

$$V \otimes V \otimes V = V_{1/2} \oplus V_{1/2} \oplus V_{3/2} = 2V_{1/2} \oplus V_{3/2}$$

$$V \otimes V \otimes V \otimes V = 2V_0 \oplus 3V_{1/2} \oplus V_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

などとなる．表現空間の前の数字はその表現空間が現れる回数を示していて，重複度とよばれる．これは，容易に想像されるように，2項係数を用いて表される．

V_j の双対空間 V_j^* に対しても，$sl(2, \boldsymbol{C})$ の作用を次のように定める．

$$H(v_k^*) = (-m+2k)v_k^*, \quad F(v_k^*) = -v_{k-1}^*, \quad E(v_k^*) = (k+1)(k-m)v_{k+1}^*,$$
$$k = 0, 1, \cdots, m \tag{1.4}$$

ここで，v_k^* は v_k の双対基底である．これを双対表現とよぶ．

◆不変テンソルのグラフによる表示◆

$\mathscr{G} = sl(2, \boldsymbol{C})$ の表現空間 V, W に対して，$v \otimes w \in V \otimes W$ ですべての $X \in sl(2, \boldsymbol{C})$ について $X(v \otimes w) = 0$ をみたすものを，不変テンソルという．不変テンソル全体は部分空間をなし，これを

$$(V \otimes W)^{\mathscr{G}}$$

とかくこともある．たとえば，$(V_j^* \otimes V_j)^{\mathscr{G}}$ は，1次元で，ベクトル $\sum_{k=0}^{m} v_k^* \otimes v_k$ によってはられていることが確かめられる．また，$i \neq j$ とすると，$(V_i \otimes V_j)^{\mathscr{G}} = 0$ となる．

このことから，テンソル積における表現の重複度を，不変テンソルの空間の次元として表すことができる．たとえば，テンソル積 $V_i \otimes V_j$ における V_k の重複度は

$$(V_k^* \otimes V_i \otimes V_j)^{\mathscr{G}} \tag{1.5}$$

の次元として与えられる．これは，i, j, k が，クレブッシュ-ゴルダン条件

$$|i-j| \leq k \leq i+j, \qquad i+j+k \text{ は整数} \tag{1.6}$$

をみたしているときには 1 で，それ以外の場合は 0 になることがわかる．不変テンソルの空間（1.5）の基底は，スカラー倍を除いて一意に決まるので，これを図 1.7 に示すグラフで表示することにする．

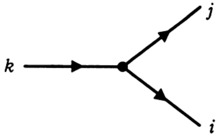


図1.7

以降，不変テンソルを示すのに，しばしばグラフを用いることにする．例として，

$$(V_{j_1}^* \otimes V_{j_2}^* \otimes V_{j_3}^* \otimes V_{j_4})^{\mathfrak{g}} \tag{1.8}$$

をとりあげる．この空間を $V_{j_4}^{j_1 j_2 j_3}$ と記すこともある．不変テンソルは，図1.9のように表すことができる．この図の意味は，次のとおりである．まず，(1.8)の最初の二つのテンソル積の分解を考えて $V_i^{j_1 j_2}$ の要素をとりだし，次に $V_{j_4}^{i j_3}$ の要素とのテンソル積をつくる．このようにして，(j_1, j_2, i), (i, j_3, j_4) が，それぞれ，クレブッシュ-ゴルダンの条件をみたす i を選ぶごとに，不変テンソルを構成することができて，これらは (1.8) の基底をなす．また，(1.8) において，2番目と3番目のテンソル積を先に組み合わせると，図1.10のように不変テンソルをつくることもできる．これらは，線型空間 (1.8) の2通りの基底の与え方を定めている．この，図1.9, 1.10で，それぞれ示された2通りの基底の変換行列の成分は，$6j$ シンボルとよばれる．

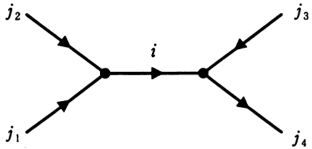


図1.9

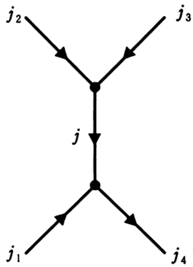


図1.10

◆点の配置の空間，組みひも群◆

複素平面の異なる n 個の点 $a_1, \cdots, a_n$ が，時刻0から1まで，互いに衝突しないで動いて，もとの場所に戻る様子を，図1.11のような組みひもで表す．複素

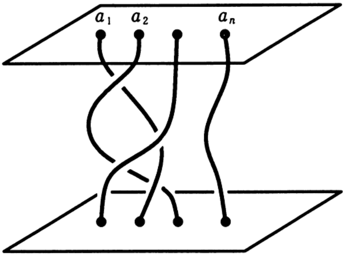


図1.11

ベクトル空間 C^n の超平面で $z_i = z_j$ で定義されるものを H_{ij} とおく．

$$X_n = C^n \setminus \bigcup_{i<j} H_{ij} \tag{1.12}$$

は，n 個の **点の配置の空間** とよばれる．上の意味の組みひもは，この空間における道に対応している．

組みひもは，図1.13左に示した基本的な組みひも σ_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ の合成

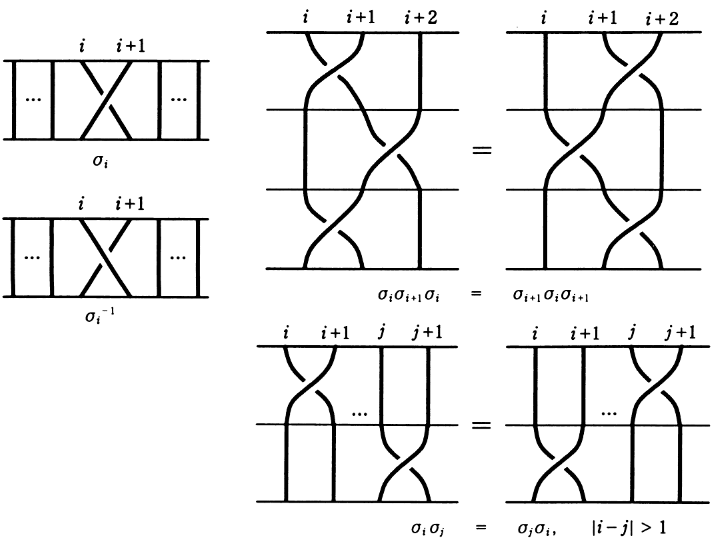


図1.13

として得られる．ここで，ひもの上下関係を変えないで，連続的に変形してうつりあう組みひもは，同一視している．このような合成を積と考えることにより，n 本のひもからなる組みひも全体は，群の構造をもつ．これを，**組みひも群**とよぶ．基本的な組みひも σ_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ は，関係式

$$
\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad i = 1, \cdots, n-1 \\
\sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i, \qquad |i-j| > 1
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

をみたしている (図1.13).

点の配置の空間において，微分形式

$$
\omega_{ij} = d\log(z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}, \qquad i \neq j \tag{1.15}
$$

は，基本的である．これらは，2次関係式

$$
\omega_{ij}\wedge\omega_{jk} + \omega_{jk}\wedge\omega_{ki} + \omega_{ki}\wedge\omega_{ij} = 0, \qquad i < j < k \tag{1.16}
$$

をみたしている．

◆KZ方程式◆

点の配置の空間 X_n 上で定義される微分方程式である KZ 方程式について述べよう．まず，$sl(2, \boldsymbol{C}) \otimes sl(2, \boldsymbol{C})$ の要素

$$
\Omega = \frac{1}{2}H\otimes H + E\otimes F + F\otimes E \tag{1.17}
$$

から出発する．$sl(2, \boldsymbol{C})$ の表現空間 $V_{j_1}, V_{j_2}, \cdots, V_{j_n}$ を用意し，これらのテンソル積 $V_{j_1}\otimes V_{j_2}\otimes\cdots\otimes V_{j_n}$ において，上の Ω をテンソル積の一つ目の成分を i 番目に，二つ目の成分を j 番目に，それぞれ作用させて得られる行列を Ω_{ij} とかく．

KZ 方程式とは，X_n 上定義された $V_{j_1}\otimes V_{j_2}\otimes\cdots\otimes V_{j_n}$ に値をとる関数 $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$ についての微分方程式

$$
\kappa\frac{\partial\Phi}{\partial z_i} = \sum_{j\neq i}\frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}\Phi \tag{1.18}
$$

である．ここで，κ はパラメータである．

$$
\omega = \frac{1}{\kappa}\sum_{i<j}\Omega_{ij}d\log(z_i - z_j) \tag{1.19}
$$

とおくと，KZ 方程式は全微分方程式

$$d\Phi = \omega\Phi \tag{1.20}$$

とも表すことができる．Ω_{ij} は，関係式

$$\begin{aligned} [\Omega_{ij}+\Omega_{jk}, \Omega_{ik}] &= 0, \qquad i, j, k \text{ は互いに異なる} \\ [\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] &= 0, \qquad i, j, k, l \text{ は互いに異なる} \end{aligned} \tag{1.21}$$

をみたしていることが確かめられるので，(1.16) とあわせると，

$$\omega\wedge\omega = 0 \tag{1.22}$$

が得られて，KZ 方程式は可積分であることがわかる．

点の配置の空間 X_n においてある点 P から出発して P に戻る閉じた道 γ を考える．点 P のまわりで，微分方程式 (1.20) の解の基底をとり，これを道 γ にそって解析接続すると，得られる解は初めにとった基底の一次結合でかける．このようにして行列 $M(\gamma)$ が決まる．微分方程式が可積分であることから，行列 $M(\gamma)$ は，P を固定して道 γ を連続的に変形しても変わらないことがわかる．この行列は，**モノドロミー行列** とよばれる．このようにして，組みひも群の行列表現が得られる．

◆ガウスの超幾何微分方程式◆

KZ 方程式の解として，古典的なガウスの超幾何関数のさまざまな一般化が現れる．ガウスの超幾何関数とは，原点のまわりのベキ級数展開

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{1.23}$$

で与えられる関数であった．ここで，記号 $(a)_n$ は $a(a+1)\cdots(a+n-1)$ を表す．

ガウスの超幾何関数は，2階の微分方程式

$$x(1-x)y'' + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0 \tag{1.24}$$

をみたすことが確かめられる．ここで，

$$\lambda = \beta-\gamma, \qquad \mu = \gamma-\alpha-1, \qquad \nu = -\beta \tag{1.25}$$

とおく．微分方程式 (1.24) は，**ガウスの超幾何微分方程式** とよばれる．

ガウスの超幾何微分方程式は，$x=0$ のまわりで，次のように展開される一次独立な解をもつ.

$$\begin{aligned} w_1^0 &= F(\alpha,\beta;\gamma;x) \\ w_2^0 &= x^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x) \end{aligned} \tag{1.26}$$

複素変数 z に対して，$z^\lambda=e^{\lambda\log z}$ は，一般に z の多価関数になることに注意しよう．z が原点のまわりを反時計回りに一周すると，値は $e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}$ 倍になる．値を一意に定めるためには，z の偏角を決める必要がある．ここでは，$-\pi<\arg z\leq\pi$ となるように偏角を選んでおくことにしよう．上の解のうち w_2^0 のほうは，原点のまわりで多価性をもつ.

さらに，ガウスの超幾何微分方程式の解は，次のように積分で表示されることが知られていて，解のグローバルな挙動を記述するうえで重要である.

$$\begin{aligned} w_1^0 &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^\infty z^\lambda(z-1)^\mu(z-x)^\nu dz \\ w_2^0 &= \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x z^\lambda(1-z)^\mu(x-z)^\nu dz \end{aligned} \tag{1.27}$$

◆超幾何関数としての4点関数◆

とくに，図1.28 a（次ページ）に示した $V_{j_4}^{j_1j_2j_3}$ での KZ 方程式を考えよう．この微分方程式の解は，4点関数とよばれるものである．変数 z_1, z_3 をそれぞれ 0, 1 として $x=z_2$ についての関数とみなすと，次の方程式が得られる.

$$\kappa\frac{d\Phi}{dx} = \left(\frac{\Omega_{12}}{x}+\frac{\Omega_{23}}{x-1}\right)\Phi \tag{1.29}$$

これは，$x=0,1,\infty$ に確定特異点をもつフックス型の微分方程式である.

典型的な場合として，$j_1=j_4=j$, $j_2=j_3=1/2$ のときを調べよう．あとで見るように，この場合が最も基本的である．$V_{j_4}^{j_1j_2j_3}$ は2次元となり，Ω_{12}, Ω_{23} はそれぞれ，2行2列の行列として表される．これを，2階の常微分方程式に直すと (1.24) の形の方程式が得られる．定数 α,β,γ は，κ, j から計算することができる．このようにして，特別な KZ 方程式の解として，超幾何関数が現れることがわかった.

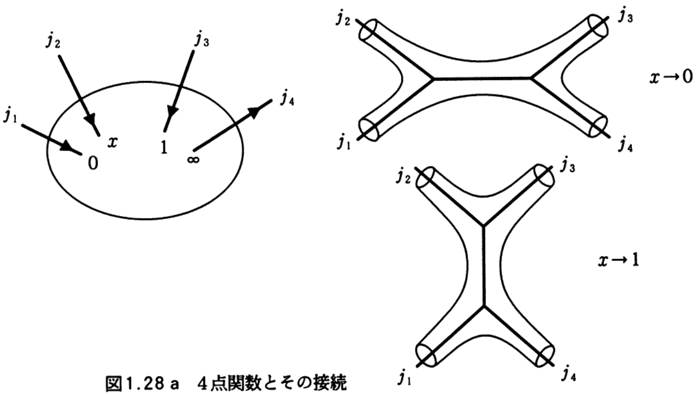


図1.28 a　4点関数とその接続

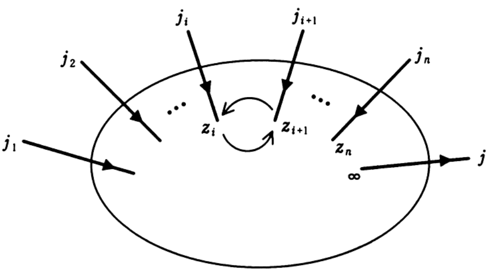


図1.28 b　KZ 方程式の解への組みひも σ_i の作用

◆4点関数への帰着◆

次に，不変テンソルの空間

$$V_j^{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

に値をもつ KZ 方程式をあつかおう．図1.28 b のように，z_i と z_{i+1} をいれかえる組みひもの作用を施したときの，KZ 方程式の解の挙動を調べたい．この問題は，4点関数の解析に帰着されることを説明しよう．領域

$$0 < |z_1| < |z_2| < \cdots < |z_n|$$

における解から出発する．

$$
\begin{aligned}
&z_{i-1} \to \cdots \to z_2 \to z_1 \to 0 \\
&z_{i+2} \to \cdots \to z_{n-1} \to z_n \to \infty
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

として，4点関数の話に直したいのであるが，このような極限操作を不用意に行なうと解は発散してしまう．そこで，次のような考察をしよう．

まず，$z_2 \to z_1$ における挙動を調べる．不変テンソルの空間 $V_j^{j_1 j_2}$ に，行列 $\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}$ は定数倍で作用することが確かめられる．この定数は，

$$
\Delta_i = \frac{i(i+1)}{\kappa} \tag{1.31}
$$

とおいて，

$$
\Delta = \Delta_j - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2}
$$

で与えられる．このことは，$z_1 - z_2$ の多価性を表す項が

$$
(z_1 - z_2)^{\Delta} \tag{1.32}
$$

であることを示している．

さらに，不変テンソルの空間 $V_j^{j_1 \cdots j_k}$ においては，行列

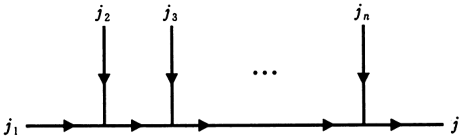
$$
\frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leq p < q \leq k} \Omega_{pq} \tag{1.33}
$$

が，定数

$$
\Delta_j - \sum_{p=1}^{k} \Delta_{j_p} \tag{1.34}
$$

として作用する．グラフ (図1.35) に示された不変テンソルに対して $k = 2, 3, \cdots$ に対する (1.33) が，同時対角化されていることになる．

このようにして，図1.35上に示したグラフに対応して，$z_1 = z_2$, $z_1 = z_2 = z_3$, $\cdots$ としたときの，多価性を表すベキ指数を指定したKZ方程式の解を対応させることができる．多価性を表す項 (1.32) などでわっておくと，(1.30) の極限操作が意味をもつことになる．このようにして，(1.30) の状況を考えることによって，4点関数の場合に帰着される．



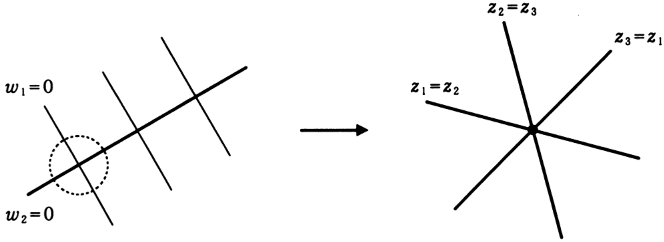


図1.35　座標変換 $w_1w_2=z_1-z_2$, $w_2=z_2-z_3$ によって $w_1=w_2=0$ のまわりで，2重点にブローアップされる．$\kappa\omega=\Omega_{12}w_1+(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})w_2+\cdots$ の形に表される．

2° モノドロミー表現とリンクの不変量

◆超幾何関数の接続公式と組みひも群の作用◆

前節で，図1.35のようなグラフを与えるごとに，KZ方程式の解の基底が対応することを説明した．たとえば図1.9，1.10などは，2通りの基底の与え方を示している．図1.9のほうは，$z_2\to z_1$ における多価性の項を，また図1.10は，$z_3\to z_2$ における多価性の項を，それぞれ対角化した基底に対応する．これらは，同じ微分方程式の2通りの解の基底の与え方であるので，ある行列で結ばれている．この行列が，**接続行列**である．

とくに，4点関数の状況を考えると，これは，超幾何微分方程式の解について，$x=0$ で正規化された基底と，$x=1$ で正規化された基底との間の関係を求める古典的な問題にほかならないことがわかる．超幾何関数の接続問題は，次のように解くことができる．(1.27) の積分表示を用いて，解

$$\varphi_1^0 = \int_1^\infty z^\lambda(z-1)^\mu(z-x)^\nu dz \tag{2.1}$$

$$\varphi_2^0 = \int_0^x z^\lambda (1-z)^\mu (x-z)^\nu dz \tag{2.2}$$

を考える．これらは，$x=0$ のまわりで正規化された解で，(2.1) は一価，また (2.2) は $x^{1-\gamma}$ の多価性をもつ．一方，積分路を変えて

$$\varphi_1^1 = \int_x^1 z^\lambda (1-z)^\mu (z-x)^\nu dz \tag{2.3}$$

$$\varphi_2^1 = \int_{-\infty}^0 z^\lambda (z-1)^\mu (z-x)^\nu dz \tag{2.4}$$

をとると，これらは $x=1$ において正規化された解の基底を与えている．ここに現れた積分を，積分路を変形することにより，0 から x，および x から 1 の積分の一次結合で表すことにより，上の２通りの基底の間の関係を求めることができる (図 2.5)．これが，[F] などに示されている超幾何関数の接続公式である．このようにして，KZ 方程式の接続問題は，基本的には，超幾何関数の接続公式から計算されることがわかった．

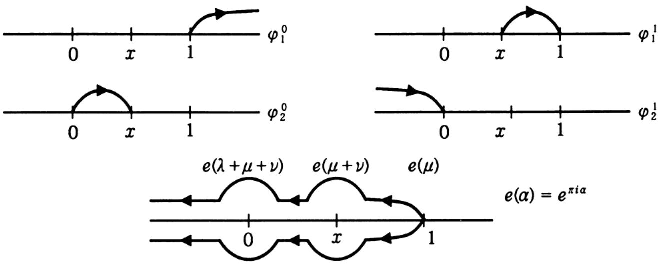


図2.5　$\varphi_1^0 = -e(\mu)\varphi_1^1 - e(\mu+\nu)\varphi_2^0 - e(\lambda+\mu+\nu)\varphi_2^1$
$= -e(-\mu)\varphi_1^1 - e(-\mu-\nu)\varphi_2^0 - e(-\lambda-\mu-\nu)\varphi_2^1$
これより φ_1^0 を φ_1^1 と φ_2^1 で表すことができる．

また，組みひもの作用

$$\rho(\sigma_i):\ V_\mu^{\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_n} \to V_\mu^{\lambda_1,\cdots,\lambda_{i+1},\lambda_i,\cdots,\lambda_n} \tag{2.6}$$

は，$x=0$ と $x=\infty$ における解の接続問題と理解される．これらの，接続行列，組みひもの表現行列は，可積分な方程式の解の解析接続から構成されているこ

とから，いくつかの関係式をみたす．図2.7のペンタゴン関係式は，その一例で，2通りの道にそって解析接続した結果が等しいことを示している．組みひも行列の基本関係式（1.14）も，このような観点から理解される．

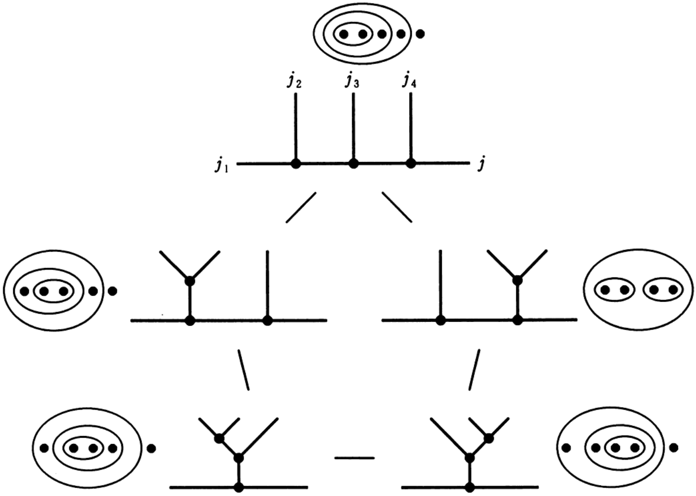


図2.7　ペンタゴン関係式
それぞれの図は五つ穴のあいた球面を三つ穴のあいた球面をぬいあわせたものとして表す方法に対応している．

◆なぜ岩堀-ヘッケ代数の表現が現れるのか◆

KZ方程式のモノドロミー表現として得られる組みひもの作用（2.6）についてもう少し調べてみよう．すでに説明した方法で，4点関数の場合に帰着して考察する．z_i, z_{i+1} をいれかえる組みひもの作用は，方程式（1.29）の解の $x=1$ における多価性として解析される．したがって，接続公式によって $x=1$ のまわりで正規化した解にうつってから調べたほうがわかりやすい（図2.8）．この解については，$x=1$ での多価性を表すベキ指数が，$sl(2, C)$ の表現の分解 $V_{1/2}\otimes V_{1/2}=V_1\oplus V_0$ に対応して，それぞれ

$$\Delta_1 - 2\Delta_{1/2}, \qquad \Delta_0 - 2\Delta_{1/2} \tag{2.9}$$

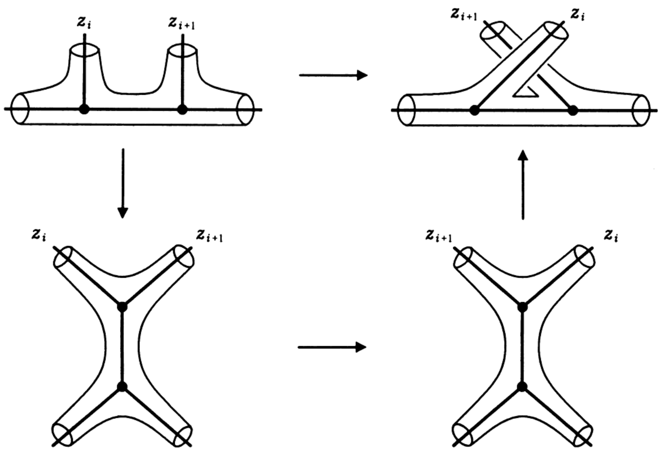


図2.8　下の段の基底では多価性が $(z_i - z_{i+1})^{\Delta}$ の形で現れるので，組みひもの作用が見やすい．

で与えられる．このことから，モノドロミー行列 $T_i = \rho(\sigma_i)$ の固有値は

$$\exp \pi\sqrt{-1}\,(\Delta_1 - 2\Delta_{1/2}), \qquad -\exp \pi\sqrt{-1}\,(\Delta_0 - 2\Delta_{1/2}) \tag{2.10}$$

の二つとなる．二つ目の固有値にマイナスの符号がついているのは，V_0 が $V_{1/2}$ の交代テンソルで表されていて，テンソル積の成分のいれかえによって，符号が反対になるからである．

以下，

$$q = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\kappa} \tag{2.11}$$

とおくことにする．上の考察によって，行列 g_i の最小多項式は

$$(T_i - q^{-3/4})(T_i + q^{1/4}) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n-1 \tag{2.12}$$

となることがわかる．このように，組みひもの基本関係式 (1.14) に加えて，2次関係式 (2.12) をみたす代数は，**岩堀-ヘッケ代数** とよばれる．KZ 方程式のモノドロミー表現として得られる組みひも群の表現は，岩堀-ヘッケ代数の関係式をみたすことがわかった．

◆モノドロミー表現から得られるリンクの不変量◆

3次元空間内の向きの付いた互いに交わらない閉曲線をリンクという．とくに，一つの閉曲線からなるときは，結び目とよぶこともある．KZ方程式のモノドロミー表現を用いて，リンクの位相不変量を導くことができることを説明しよう．

リンク L の図式を図2.13のように横に切って，図に示した基本的な構成要素に分解する．それぞれの切り口に対して，図2.13のように，不変テンソルの空間を対応させる．さらに，図2.14のように，組みひもの行列表現と，接続行列を用いて，これらの線型空間の間の線型写像を構成する．すべての線型写像を合成すると，ある数が得られる．これを，Z_L とかくことにする．

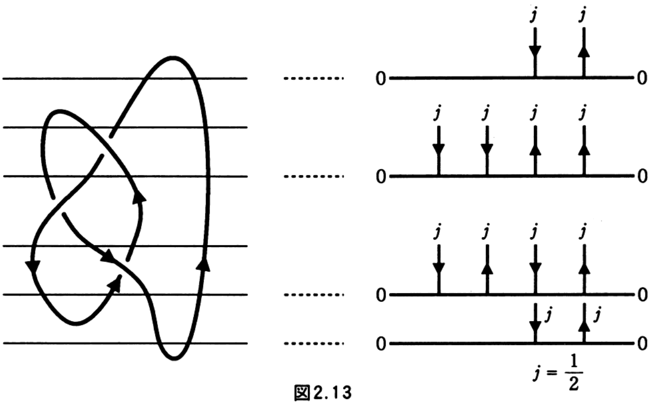


図2.13

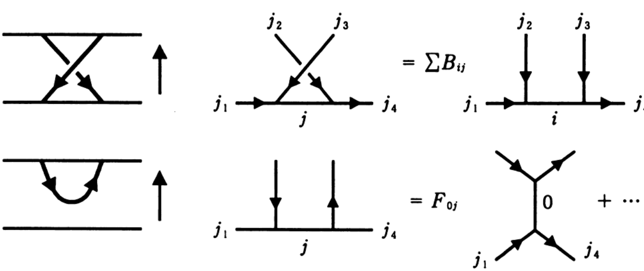
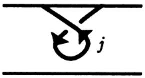


図2.14　それぞれ組みひも行列，接続行列の成分を用いて定義される．



$= \exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_j$

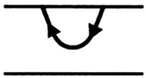


図2.15　正の交差のひねりによる解消

図2.15のように，1回ひねりのある図式で上の Z_L を計算すると，ひねりのない図式の場合の

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_{1/2} = q^{3/4} \tag{2.16}$$

倍になることがわかる．そこで，リンク L の図式において，正の交差の個数から負の交差の個数を引いたものを $w(L)$ とかいて，

$$Z_L' = q^{-\frac{3}{4}w(L)} Z_L \tag{2.17}$$

とおく．組みひも行列，接続行列の間に自然に成り立つ関係式を用いると，Z_L' は，図2.18に示した局所的な変形で不変であることが得られる．

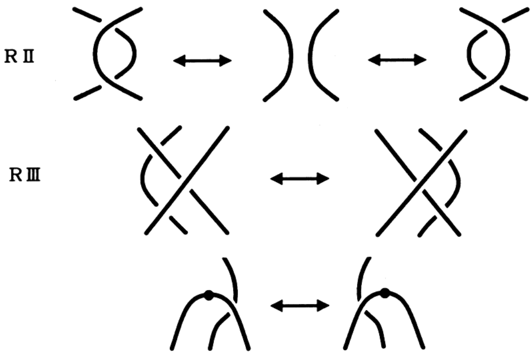


図2.18

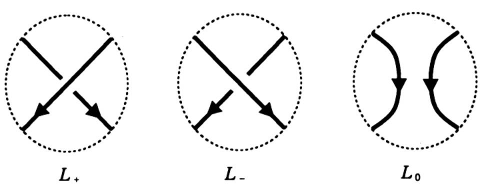


図2.19

組みひも行列の最小多項式が (2.12) のように求められているので，Z_L は，図2.19に示したダイアグラムの局所的な変形に対して，関係式

$$q^{1/4}Z_{L_+} - q^{-1/4}Z_{L_-} = (q^{1/2}-q^{-1/2})Z_{L_0} \tag{2.20}$$

をみたす．

ただし，このままでは，図2.21上の変形では不変でないので，修正する必要がある．そのために，図2.21のダイアグラム K に対する Z_K' を d^{-1} とおく．リンク L のダイアグラムの極大点の個数を $m(L)$ として，

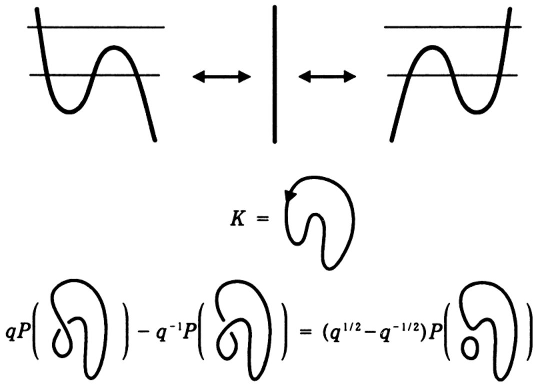


図2.21

$$P_L = d^{m(L)-1}Z_L' \tag{2.22}$$

とおく．これが，求めたかったリンクの不変量である．

P_L については，

$$qP_{L_+} - q^{-1}P_{L_-} = (q^{1/2}-q^{-1/2})P_{L_0} \tag{2.23}$$

となる．また，自明な結び目については，

$$P_{\bigcirc} = 1 \tag{2.24}$$

をみたしている．式 (2.23) は，いわゆる**スケイン関係式**とよばれるもので，ここで求めた不変量は，基本的には，ジョーンズ多項式であったことが結論される．このような方法を用いると，リー環とその表現を与えるごとに，さまざま

なジョーンズ多項式の拡張が得られることもわかる.

正規化に必要な定数 d は, 次のように計算される. 図2.21下に示したスケイン関係式から,

$$d = \frac{q - q^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \tag{2.25}$$

となる.

3° バシリエフ不変量

◆モノドロミー表現の反復積分表示◆

全微分方程式でかかれた KZ 方程式 (1.20) を積分方程式

$$\Phi = \Phi(0) + \int \omega \Phi \tag{3.1}$$

に直して, 逐次近似によって解くことを考えよう. 始点で $\Phi(0) = I$ となる解を道 γ にそって解析接続したときの解は,

$$\Phi_0 = I, \qquad \Phi_{n+1} = I + \int_\gamma \omega \Phi_n \tag{3.2}$$

をみたす関数列 $\{\Phi_n\}$ の極限として与えられる. これは,

$$J_m(\gamma) = \int_\gamma \underbrace{\omega \cdots \omega}_{m} \tag{3.3}$$

を用いて

$$\Phi = I + \sum_{m=1}^{\infty} \kappa^{-m} J_m(\gamma) \tag{3.4}$$

と表すことができる. ここで, $J_m(\gamma)$ は m 階の反復積分で, 次のように定義される.

一般に, $\omega_1, \cdots, \omega_m$ を一次微分形式として, これらの, 道 γ による引き戻しを $\omega_1(t), \cdots, \omega_m(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とかくとき, 反復積分は

$$\int_\gamma \omega_1 \cdots \omega_m = \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m \leq 1} \omega_1(t_1) \cdots \omega_m(t_m)\, dt_1 \cdots dt_m \tag{3.5}$$

で与えられる．

とくに，KZ 方程式の状況で γ を閉じた道とすると，終点での値 $\Phi(\gamma(1))$ は，道 γ にそって解析接続したときのモノドロミー行列にほかならない．つまり，反復積分の和 (3.4) はモノドロミー行列の一つの表し方と解釈することもできる．

J_m をもう少し具体的にかくと，(1.15) の微分形式 ω_{ij} を用いて

$$\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_m\le 1}\sum\Omega_{i_1j_1}\cdots\Omega_{i_mj_m}\omega_{i_1j_1}(t_1)\cdots\omega_{i_mj_m}(t_m) \tag{3.6}$$

と表される．ここで，和は，1, 2, …, m から互いに異なる二つの数の組 (i_1, j_1), …, (i_m, j_m) を選ぶ方法すべてにわたるとし，それぞれの選び方に対して，図3.7に示した図式を対応させる．

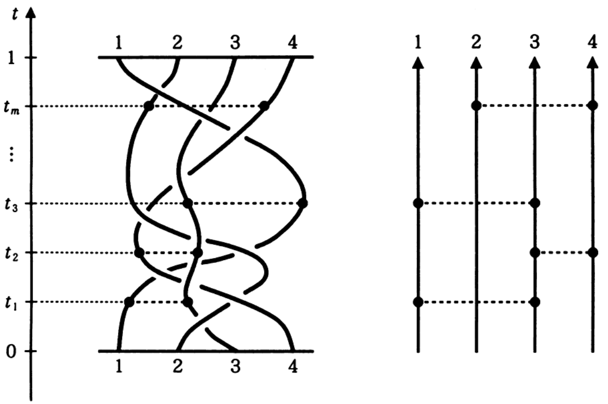


図3.7

◆結び目のバシリエフ不変量とその積分表示◆

バシリエフは結び目全体のなす空間の幾何を研究する過程で，次のような，有限オーダーの位相不変量の概念に到達した．v を結び目の位相不変量とする．つまり結び目 K についてある数 $v(K)$ が定義されていて K_1 と K_2 が連続的な変形でうつりあうとき，$v(K_1)=v(K_2)$ となっているとする．図3.8のように結び目の図式の k 個の交差に注目して，$\varepsilon_j=\pm 1$ $(j=1,\cdots,k)$ に応じて，これらの交

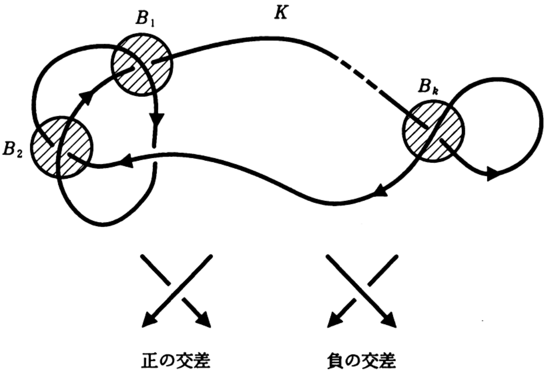


図3.8　$B_1, \cdots, B_k$ で交差を正または負にすることにより 2^k 個の結び目 $K_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}$ がつくられる.

差を正または負にして得られる結び目を $K_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}$ とかく. $k > m$ ならば, 常に

$$\sum_{\varepsilon_j = \pm 1,\, j=1, \cdots, k} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k v(K_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}) = 0 \tag{3.9}$$

をみたしているとき, v をオーダー m の **バシリエフ不変量** とよぶ.

たとえば, v をオーダー 2 のバシリエフ不変量としよう. 図3.10のように二つの2重点を許す結び目について, v の値を, 2重点を正または負の交差でおきかえて得られる結び目に対する v の値の交代和として定めよう. この値は, v が

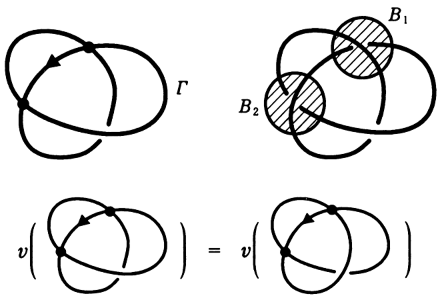


図3.10　$v(\Gamma) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 v(K_{\varepsilon_1 \varepsilon_2})$ と定義して, 2重点をもつグラフにも値を拡張する.

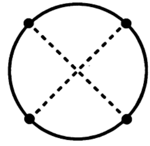


図3.11

オーダー 2 であることから，二つの 2 重点以外の交差の上下を変えても変化しないことがわかる．このように，二つの 2 重点をもつ結び目について，図 3.11 を対応させる．点線で結ばれた点を同一視して 2 重点をもつ結び目をつくるわけである．不変量 v は，図 3.11 に対して，ある値を定めることになる．一般に，v がオーダー m のバシリエフ不変量であるとすると，m 本の弦からなるこのような図式に対して，ある値を定める．

このようにして定まった，ダイアグラムに対する値は，ファインマン図形のウェイトとよばれることもあり，いくつかの関係をみたしている．図 3.12 の上の関係式（4 項関係式）は，結び目の不変量が，図 2.18 R Ⅲ に示した局所的な変形で不変であることに由来する．

反復積分の定義をよく見ると，$J_m(\gamma)$ は，上の意味のオーダー m という性質をみたしていることがわかる．いわば，組みひものバシリエフ不変量ということができる．関係式（1.21）は，この場合の 4 項関係式にほかならない（図 3.13）．前節で，ジョーンズ多項式が，KZ 方程式のモノドロミーとして表されることを

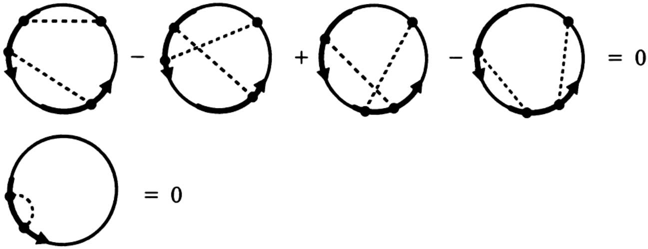


図 3.12　矢印のついた部分での局所的な変化を表している．上の方の関係式は，4 項関係式とよばれる．

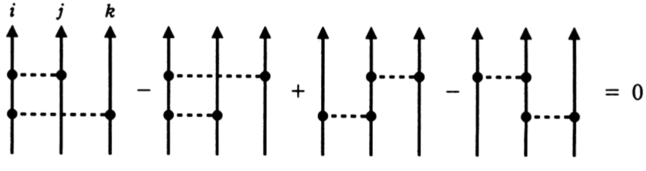


図 3.13　4 項関係式としての可積分条件 $[\Omega_{ij}+\Omega_{jk}, \Omega_{ik}]=0$

示した．また，先に見たように，モノドロミー行列は反復積分の和で表される．

これらは，次の重要な事実を示唆している．ジョーンズ多項式を，パラメータ $\frac{1}{\kappa}$ について，0 のまわりでのテイラー展開すると，その m 次の係数が，オーダー m のバシリエフ不変量であること，さらに，これらが反復積分で表されることである．いいかえると，結び目 K のジョーンズ多項式 $P_K(q)$ の m 階微分係数 $\frac{d^m}{dt^m}P_K(1)$ が，m 階までの反復積分で表示されることになる．これらの事実は，モノドロミー表現からジョーンズ多項式を導いた手続きを振り返ってみると，証明することができる．

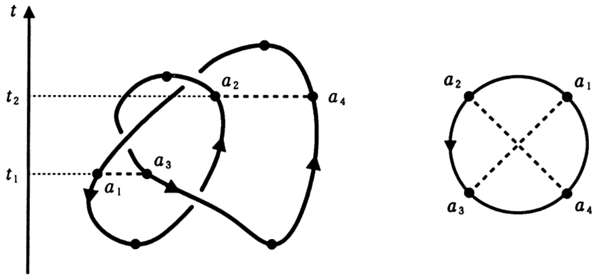


図 3.14　式 (3.15) の和は，$t_1 \leq t_2$ について (3.11) の図式に対応するような $(i_1 j_1 i_2 j_2)$ の選び方すべてにわたる．ε は下向きの矢印の個数を示す．上の図では $\varepsilon = 2$．

1 階微分係数は，スケイン関係式 (2.23) より交差の上下にはよらなくなって，常に 0 であることが示されるので，2 階微分係数について上のプログラムを実行してみよう．図 3.14 のような結び目 K の図式について，その極大点の個数を $m(K)$ とすると，ジョーンズ多項式の 2 階微分係数の積分表示

$$\frac{3}{2\pi^2}\int_{t_1 \leq t_2} \sum (-1)^{\varepsilon} \omega_{i_1 j_1}(t_1)\, \omega_{i_2 j_2}(t_2) + \frac{m(K)}{4} - \frac{1}{4} \tag{3.15}$$

が得られる．記号は，式 (3.6) と同様である．図 3.14 に上の和の正確な意味を説明しておいた．最後の二つの項は，式 (2.25) における正規化に現れる d の計算に由来している．反復積分の部分は，図 3.16 に示したように 2 重対数関数の積分

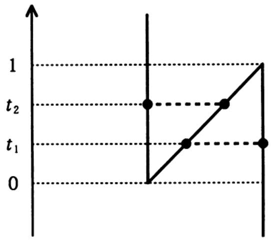


図3.16

$$\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t} = -\frac{\pi^2}{6} \tag{3.17}$$

となり，この値が式 (3.15) に反映している．詳しくみると，積分値 (3.15) は整数で，常に6の倍数になることもわかる．

このような結び目の位相不変量の積分表示は，複素平面において，積分 $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C d\log z$ が，整数になり，曲線 C の原点のまわりの回転数を表すというコーシーの積分公式のさまざまな一般化になっている．バシリエフ不変量がファインマン図形のウェイトを定めることは，すでに見たが，最近，コンセビッチにより，逆の構成が可能であることが明らかになった．関係式 (3.12) をみたすようにウェイトを与えたとき，これらのウェイトを係数とする1次微分形式 ω_{ij} の反復積分により，不変量を再構成できることが示された．ここで，4項関係式は，可積分条件として再び重要な役割を演ずることになる．

参考文献

KZ 方程式のモノドロミー表現の構造は，とくに量子群との関連で，[D]，[Ko1]，[TK] などで調べられている．岩堀－ヘッケ代数の表現とそれから得られるリンクの不変量については，[J] を見られたい．ジョーンズの不変量については，拙著 [Ko3] に初等的な解説がある．WZW 模型による3次元多様体の不変量は，[W] において提唱される．その後の，代数的な構成については，[RT]，[Ko2] などがある．バシリエフ不変量に関しては，[BL]，[K]，[V] などを見られたい．正規化項の計算と多重対数関数に関しては，[LM] によって組織的に調べられている．ジョーンズ多項式の微分係数の幾何的意味については，[M] ですでに研究されていた．また，これらが，多項式時間で計算されることに注目して，ランダムな折れ線からできる結び目の発生確率について，統計的な研究を行なった [TDW] がある．

[BPZ] A. A. Belavin, A. N. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite dimensional symmetries in two dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333 – 380.

[BL] J. S. Birman and X-S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, *Invent. Math.* **111** (1993), 225 – 270.

[D] V. G. Drinfel'd, Quasi-Hopf algebras, Algebra and Analysis 1-6 (1989), 114 – 148.

[F] 福原満洲雄, 常微分方程式, 岩波全書116, 第二版, 1980.

[J] V. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math.* **126** (1987), 335 – 388.

[KZ] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions, *Nucl. Phys.* **B247** (1984), 83 – 103.

[Ko1] T. Kohno, Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, *Ann. Inst. Fourier* **37-4** (1987), 139 – 160.

[Ko2] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, *Topology* **31-2** (1992), 203 – 230.

[Ko3] 河野俊丈, 組みひもの数理, 遊星社, 1993.

[K] M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, to appear in *Advances in Soviet Mathematics.*

[LM] T. Q. T. Le and J. Murakami, On Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations of mixed Euler numbers, preprint, Max-Planck-Institut, 1993.

[M] H. Murakami, On the derivatives of the Jones polynomial, *Kobe J. Math.* **3** (1986), 61 – 64.

[RT] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991), 547 – 597.

[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on $\boldsymbol{P}^1$ and monodromy representations of braid groups, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **16** (1988), 297 – 372.

[TDW] K. Tsurusaki, T. Deguchi and M. Wadati, A topological study of random walks, preprint, 1993.

[V] V. A. Vassiliev, Complements of discriminants of smooth maps : Topology and applications, *Translation of Mathematical Monographs* **98**, Amer. Math. Soc. 1991.

[W] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351 – 399.

第3話

可解格子模型

国場敦夫

0° はじめに

多くの平衡統計力学系は温度や相互作用パラメーターがある値をとると，たとえば２次相転移では相関距離，比熱，帯磁率が発散したり，自発磁化が消失または発生するなど，臨界現象と呼ばれる特異な振舞いをしめします．可解格子模型の研究はこれらを exact に記述するためのひとつの試みです．

ひと口に可解格子模型といってもいろいろあります．たとえば有限状態をとり，有限長の相互作用をする古典スピン達が１次元的に並んだ模型は，本質的には初等的な行列の対角化計算で簡単に解けてしまいます．1次元イジング (Ising) 模型は，その典型的な例といえるでしょう．また，これとは解けるメカニズムは違いますが，いわゆる Spherical model とよばれるものや，ある種の特別な無限次元格子（たとえば Bethe 格子）上のイジング模型なども，いくつかの物理量を厳密に計算できるという意味で解けるといってよいでしょう．

本稿で考察の対象とするのは，これらの例とは趣を異にする可解格子模型のひとつのクラスです．それらはおもに２次元の古典スピン系と１次元量子スピン系の模型であって，おそらくその最初の非自明な例は，1931 年の H. A. Bethe（ハンス・ベーテ）の論文［1］にまでさかのぼることができます．その後，L. Onsager, C. N. Yang, E. H. Lieb, R. J. Baxter 等の先駆的な仕事によって，「… 模型」と名のつくいくつかの代表的な例，２次元イジング，6-vertex (6頂点), 8-vertex (8頂点), hard hexagon (硬い六角形), 1次元量子 XXZ, XYZ スピン鎖などが解かれました．(Bethe が最初に解いたのは1次元量子 XXX スピン鎖で上記の例の特別な場合に相当します．) もちろんこれらの模型は現実の

統計系にとっては理想化された数学的モデルにすぎませんが，1982年に出版された Baxter の本 “Exactly solved models in statistical mechanics” [2] の序文のなかで，彼は次のように述べています．

> Basically, I suppose the justification for studying these lattice models is very simple : they are relevant and they can be solved, so why not do so and see what they tell us ?

実際，そうして物理量の計算を実行したり，可解性の機構を探るうちに，多くの豊かな物理的，数学的な構造が見いだされて，このクラスの可解格子模型はそれ自体が数理物理の興味ある研究対象とされるようになってきました．

この傾向は70年代頃から加速度的に増大して，現在に至っています．特に80年代にはいってからの発展は，共形場理論や量子群の発見などとあいまってめざましいものがあります．そこでは，統計力学や場の理論に特有の “無限個の自由度の問題” が，無限次元の対称性をもって見事に統制される様を見ることができます．本稿で考えるクラスの可解格子模型とは，大雑把にいえば，そうして辛くも興味ある物理量が厳密に求まるような，そんな無限大の対称性を内蔵しているもの，といってよいでしょう．

以下では，おもに物理や数学等の学部3，4年生くらいの読者を想定して，なるべく予備知識を仮定せず，簡単な例を用いて，それらの一端を垣間見てみようと思います．

1° 2次元イジング模型

2次元の正方格子 $\mathcal{L}$ の各点 i に $\sigma_i = \pm 1$ をとるスピンの自由度を置く．$\mathcal{L}$ はひとまず有限のサイズであるとしておきます．$\{\sigma_i\}$ の ± 1 のとらせ方は全部で $2^{|\mathcal{L}|}$ あって，その各々を配置と呼びます．配置 $\{\sigma_i\}$ に対し，その全エネルギー $E(\{\sigma_i\})$ を次のように定める．

$$E(\{\sigma_i\}) = -J_1 \sum_{(i,j):\,縦} \sigma_i \sigma_j - J_2 \sum_{(i,j):\,横} \sigma_i \sigma_j . \tag{1.1}$$

ここで二つの和は，それぞれ $\mathcal{L}$ 上のすべての縦方向および横方向の最隣接格子点のペア (i, j) についての和で，$J_1, J_2 > 0$ としておきます．

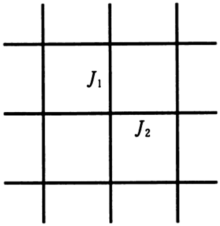


図1

いま系のサイズ $|\mathcal{L}|$ が十分大きくて，絶対温度 T の熱平衡状態にあるとすると，Boltzmann の原理の教えるところによれば，$\{\sigma_i\}$ という配置の実現する統計的確率は $\exp\left(-\dfrac{E(\{\sigma_i\})}{k_B T}\right)$ に比例します．ただし k_B はボルツマン定数．すると高温極限 $T \to \infty$ では，どんな配置 $\{\sigma_i\}$ もそのエネルギーに関係なく同じ確率で実現します．これと正反対に低温極限 $T \to 0$ では，$J_1, J_2 > 0$ に注意すると，(1.1) から二つの最低エネルギー状態 $\forall \sigma_i = 1$ か $\forall \sigma_i = -1$ しか確率的に許されません．そのどちらに自発的対称性が破れるかは，たとえば境界条件を用いて指定してやることができます．これらのことをふまえて $\mathcal{L}$ のひとつの格子点 $i = 1$ に着目し，その上のスピンの期待値

$$\langle \sigma_1 \rangle = \lim_{|\mathcal{L}| \to \infty} \frac{\sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_1 \exp(-E(\{\sigma_i\})/k_B T)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-E(\{\sigma_i\})/k_B T)} \tag{1.2}$$

を考えよう．ここで，$\sum_{\{\sigma_i\}}$ は $\mathcal{L}$ の境界上のスピンがみな $+1$ に固定された配置にわたる和です．これにより $\forall \sigma_i = 1$ が基底状態となるようセレクトします．（形式的にすべての配置について和をとると，$E(\{\sigma_i\}) = E(\{-\sigma_i\})$ から $\langle \sigma_1 \rangle$ は恒等的に 0 になってしまうことに注意．）また，熱力学的極限 $\lim_{|\mathcal{L}| \to \infty}$ は，境界が σ_1 からすべての方向にどんどんと遠ざかっていくようにとります．こうすれば，境界上で $+1$ に固定したことは基底状態をセレクトする以外には影響しないと素

朴に期待してよいでしょう．すると，さきにのべたことから

$$\lim_{T\to+0}\langle\sigma_1\rangle = 1, \qquad \lim_{T\to+\infty}\langle\sigma_1\rangle = 0 \tag{1.3}$$

となるべきことがわかります．一般の温度 $0<T<\infty$ では $\langle\sigma_1\rangle$ は $\exp\left(\frac{J_1}{k_B T}\right)$ と $\exp\left(\frac{J_2}{k_B T}\right)$ の関数で，$0<\langle\sigma_1\rangle<1$ となっているはずです．

問　関数 $\langle\sigma_1\rangle$ をすべての $T\geq 0$ で決定せよ．

これは Onsager によって1949年に解かれ，Yang が最初の証明を1952年に出版したといわれている有名な問題です．ちなみに，分配関数（(1.2) の分母）は Onsager [3] により1944年に求められています．

答

$$\langle\sigma_1\rangle = \begin{cases}(1-k^2)^{1/8} & T\leq T_c\\ 0 & T\geq T_c\end{cases} \tag{1.4 a}$$

ただしここで k と T_c は，

$$k^{-1} = \sinh\frac{2J_1}{k_B T}\sinh\frac{2J_2}{k_B T}, \qquad \sinh\frac{2J_1}{k_B T_c}\sinh\frac{2J_2}{k_B T_c} = 1 \tag{1.4 b}$$

で与えられる．

この見事な結果において，$T=T_c$ が臨界点または相転移点と呼ばれる所です．また，T が T_c から下に外れると，$\langle\sigma_1\rangle$ は $|T-T_c|^{1/8}$ に比例して立ち上がりますが，この $\frac{1}{8}$ という有理数はいわゆる臨界指数で β と呼ばれているものの例です．さらに，この値はいまの場合は，相互作用パラメーター J_1, J_2 の子細によらなかったわけで，これは臨界現象一般に広く期待される **universality** という性質のひとつの表れといえます．このように厳密解の結果は，我々が直観的にえがく相転移の描像に確かな数学的例証（時として反証！）を与えてくれる大切なものです．そしてもっと積極的に，おそらく直観だけではつかまえられない $\beta=\frac{1}{8}$ というこの universality class の普遍定数を，近似なしで決定しています．

もともとイジング模型は，スピンの ± 1 をミクロな磁化の上向き，下向きと解釈した磁性体のモデルですが，その立場では $\langle\sigma_1\rangle$ は自発磁化に相当します．数学的には $\langle\sigma_1\rangle$ はひとつの格子点上のスピンの期待値だから，1点関数とでも呼

べるもので，同様に考え得る2点関数 $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle$，多点関数 $\langle\sigma_{i_1},\cdots,\sigma_{i_k}\rangle$ など，いろいろな相関関数の中で最も簡単なものといってよいでしょう．にもかかわらず，Yang の原論文［4］にある（1.4）の最初の導出は非常に複雑で，まさに名人芸をもって成し遂げられました．

では，せめて1点関数が exact に求まるような可解格子模型は他にあるのでしょうか．Onsager - Yang の結果からおよそ30年後の1980年，Baxter がその一つの例を発見しました．そしてまたその発見は，格子模型のスピン配置の空間（状態空間）とモジュラー関数やアフィン・リー代数の表現の combinatorial な側面が織りなす不思議な世界への入り口でもありました．

2° Hard hexagon（硬い六角形）模型

今度は $\mathcal{L}$ を2次元三角格子としてその上の格子気体で，二つの気体分子が同一の格子点に重なり合うことなく，また最隣接点に並んで居すわることも許されない，という排斥条件をみたすものを考えよう．すると，下の図2Aからわかるように，各気体分子は一つの格子点を中心とする重なり合うことの許されない硬い六角形（Hard hexagon）と思ってよい．

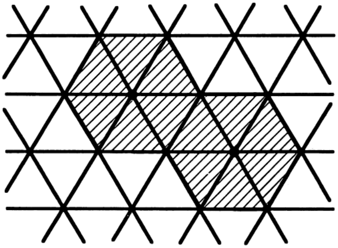


図2A

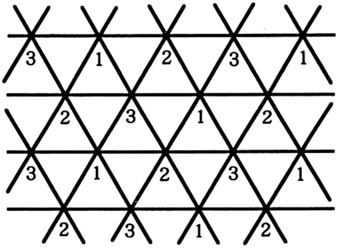


図2B

$\mathcal{L}$ の各点 i に $\sigma_i=0,1$ というスピン自由度をわりふって，i を中心とする Hard hexagon がいるとき $\sigma_i=1$，いないとき $\sigma_i=0$ とおくこととして，大分配関数

と呼ばれる

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} z^{\sigma_1+\cdots+\sigma_N} \prod_{(i,j)} (1-\sigma_i\sigma_j) \tag{2.1}$$

で定義される量 Z を考えましょう．ここで，N は格子点の総数，$\sum_{\{\sigma_i\}}$ は配置についての和で全部で 2^N 項ある．積 $\prod_{(i,j)}(1-\sigma_i\sigma_j)$ は，$\mathcal{L}$ 上のすべての最隣接点のペア (i,j) にわたる．これは 2^N 個の配置のうち，実際は Hard hexagon が重ならないという条件 $\forall \sigma_i\sigma_j = 0$ をみたすものにのみ和を制限しているわけです．最後に，$z>0$ は活動度とよばれるもので，一つの Hard hexagon の導入しやすさを指定するパラメーターです．(2.1) の右辺の $\sum_{\{\sigma_i\}}$ の中の各項が配置 $\{\sigma_i\}$ の実現確率に比例するとして，それを重みとする期待値としていろいろな物理量が $N\to\infty$ の極限で定義されるというのが Hard hexagon 模型です．

この模型も z の値につれて面白い相転移がありそうなことが，以下のような考察から示唆されます．まず図 2B のように，$\mathcal{L}$ には三つの部分格子 $\mathcal{L}_r$ $(r=1,2,3)$ がありますが，そのひとつの格子点 k 上のスピン σ_k の期待値

$$\rho_r = \langle\sigma_k\rangle = Z^{-1} \sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_k z^{\sigma_1+\cdots+\sigma_N} \prod_{(i,j)} (1-\sigma_i\sigma_j), \qquad k \in \mathcal{L}_r \tag{2.2}$$

を考えます．これは格子点 k に Hard hexagon が存在する確率を与える 1 点関数です．簡単のため極端な場合 $z\to\infty$ を考えると，Hard hexagon が隙間なくつまっている配置が相対確率で他を圧倒します．しかしそのような配置は，$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ のうち一つだけが満席であとはすべて空席の状態だから 3 通りあります (図 2B 参照)．そこで (2.2) を計算する際，σ_k の十分遠方では $\mathcal{L}_1$ だけがつねに満席となるという境界条件を課しておくことにしましょう．これはイジング模型で $T\to 0$ を考えたときと似た事情です．すると

$$\lim_{z\to\infty} \rho_1 = 1, \qquad \lim_{z\to\infty} \rho_2 = \lim_{z\to\infty} \rho_3 = 0 \tag{2.3}$$

となるはずです．逆の極端な場合 $z\to 0$ では，配置 $\forall \sigma_i = 0$（ただし i は境界以外の格子点）が他を圧倒して

$$\lim_{z\to 0} \rho_r = 0 \qquad r = 1,2,3 \tag{2.4}$$

となります．(2.3) と (2.4) からわかるように，$z\to 0$ での三つの部分格子の平等性が $z\to\infty$ にいくと最大限に破れています．では途中の z の値ではどう振る舞うのか，もう少しその感じをつかむために調べてみましょう．まず z が十分小さいときは $\forall \sigma_i=0$ の配置を出発点として，Hard hexagon を1個，2個と順次導入していくことにより，(2.2) を z のベキ級数として摂動的に求めていくことができます．この計算では遠方の境界条件は問題にならず，つねに $\rho_1=\rho_2=\rho_3$ となり，たとえば z^3 のオーダーまでだと (Hard hexagon が3個以下) (2.2) は次のように求められます．

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{z+(N-7)z^2+\left\{\frac{1}{2}N(N-7)-7N+58\right\}z^3+O(z^4)}{1+Nz+\frac{1}{2}N(N-7)z^2+O(z^3)}$$

$$= z - 7z^2 + 58z^3 + O(z^4). \tag{2.5}$$

ここで $N-7$ 等の係数は Hard hexagon の排斥効果を考慮したもので，(2.4) はもちろん (2.5) の $z\to 0$ 極限になります．$\mathcal{L}$ の格子点の総数 N はきれいに相殺することに注意してください．結局，z を0からだんだんと増やしていくとき，$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ の平等性がどこかで破れるとするなら，それは級数 (2.5) の収束半径を越える瞬間であろうということになります．そしてその値を exact に求めるためにはやはり次の問いに答えねばなりません．

問　$\rho_1=\rho_2=\rho_3$ の $z=0$ からの展開級数 (2.5) を完全に決定せよ．

1980年に Baxter が答えを見つけました．(cf. [2])

答　$$z = -x\left(\frac{H(x)}{G(x)}\right)^5 = -x+5x^2-15x^3+\cdots, \qquad -1<x<0 \tag{2.6 a}$$

として z から新しい変数 x に移ると，

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -x\frac{G(x)H(x^6)P(x^3)}{P(x)} = -x-2x^2-3x^3+\cdots. \tag{2.6 b}$$

ただし，関数 $H(q), G(q), P(q)$ は $|q|<1$ なる一般の複素数 q に対し次式で定義される．

$$H(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}, \tag{2.7 a}$$

$$G(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4})}, \tag{2.7 b}$$

$$P(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1}). \tag{2.7 c}$$

(2.6 a) で x が 0 から -1 へと減少すると，z は 0 からある有限値 $z_c > 0$ まで単調に増加します．(2.7) の関数達は $|q| \geq 1$ では定義され得ず，展開 (2.5) は $(0 \leq) z \leq z_c$ でのみ意味をもちます．z_c およびそのときの ρ_r の値 $\rho_r^{(c)}$ と，z が下から z_c に近づくときの振舞いは次のように与えられます．

$$z_c = \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 = 11.090169\cdots, \tag{2.8 a}$$

$$\rho_r^{(c)} = \frac{4}{5}\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = 0.276393\cdots, \tag{2.8 b}$$

$$\rho_r = \rho_r^{(c)} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\left|\frac{z-z_c}{z_c}\right|^{\frac{2}{3}} + O(z-z_c). \tag{2.8 c}$$

(2.6) の $x \to -1$ から (2.8) を導くには (2.7) の関数達の $q \to \pm 1$ での振舞いを知ることが必要です．これを可能にしてくれる重要な性質が，モジュラー変換性 です．たとえば，

$$h(\tau) = q^{\frac{11}{60}} H(q), \qquad g(\tau) = q^{\frac{-1}{60}} G(q), \qquad q = \exp(2\pi i \tau) \tag{2.9}$$

とおいて，τ の関数を定義します．いま $|q| < 1$ でなければならなかったので，τ は複素上半面に限られます．このとき，$-\dfrac{1}{\tau}$ もやはり上半面上にあって，次の等式が成立します．

$$\begin{pmatrix} h(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{\pi}{5} \\ \sin\frac{\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\left(-\frac{1}{\tau}\right) \\ g\left(-\frac{1}{\tau}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

すなわち変換 $\tau \to -1/\tau$ で，$h(\tau)$, $g(\tau)$ による linear span は不変になります．この事情は $\tau \to \tau+1$ のもとでも同じなので，結局この二つの変換から生成され

るモジュラー群に対して不変となっています．以下では，このような意味での不変性をもつ関数を簡単にモジュラー関数と呼ぶことにします．さて，(2.9)，(2.10) で $\tau = i\varepsilon$ とおいて $\varepsilon \to +0$ とすると $q = e^{-2\pi\varepsilon} \to 1$ となる一方で，これに conjugate な $\bar{q} = e^{-2\pi i/\tau}$ は $e^{-2\pi/\varepsilon} \to 0$ と消えていきます．したがって，(2.10) からただちに，$q \to 1$ での leading な発散を $H(q) \simeq \dfrac{2}{\sqrt{5}} \sin\dfrac{\pi}{5}(\bar{q})^{-1/60}$，$G(q) \simeq \dfrac{2}{\sqrt{5}} \sin\dfrac{2\pi}{5}(\bar{q})^{-1/60}$ という具合に取り出すことができます．(2.8) はこのようなモジュラー変換性を用いた計算により (2.6) から導かれます．

以上では ρ_r の $z=0$ のまわりの展開級数を考えましたが，同様に部分格子 $\mathcal{L}_1$ に Hard hexagon が満席という配置からの z^{-1} によるベキ級数展開も考えられます．これもモジュラー関数により exact に求まっていて，それは (2.5) とは逆に，$z_c \leq z$ でのみ意味をもちます．また，このときつねに $\rho_1 \geq \rho_2 = \rho_3$ で，z が z_c に上から近づくとき ρ_r は $\rho_r^{(c)}$ (2.8 b) に収束し，(2.6 b) の $x \to -1$ ときちんとつながります．秩序パラメーター $\rho_1 - \rho_2$ は $|z-z_c|^{1/9}$ に比例して 0 になることも導かれます．結局 Hard hexagon 模型の臨界点は唯一 (2.8 a) で与えられ，臨界指数 β は $\dfrac{1}{9}$，したがってイジング模型（$\beta = \dfrac{1}{8}$）とは異なる universality class に属すると結論されます．

以上は Hard hexagon 模型の設定と，Baxter によるその1点関数の結果 (2.6) ～ (2.8) の概要です．そこで得られた臨界点や臨界指数はもちろんそれ自体，統計物理における exact な結果の価値ある蓄積といってよいでしょう．一方，より数学的な観点からすると，結果の最も本質的な様相は，1点関数がモジュラー関数を用いて記述されることといえます．(2.9)，(2.10) で見たように，これらの関数は一般に固有の分数ベキをもち，モジュラー変換を介してそれらが臨界点近傍の振舞いを決定します．

では (2.6)，(2.7) はどうやって導かれたのでしょうか．その導出過程にはひとつの印象的な event がありました．

3° 1次元状態和と Rogers - Ramanujan 恒等式

Hard hexagon 模型の1点関数は，(2.2) のように2次元の三角格子 $\mathcal{L}$ 上の状態和によって定義されています．Baxter はそれが本質的には，次のような量 $F(0, q)$, $F(1, q)$ の計算に帰着することを示しました．(以下簡単のため，もっぱら $0 < z < z_c$ の領域，したがって $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ の場合を考えます．)

$$F(\sigma_1, q) = \lim_{m \to \infty} \sum_{\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_m} q^{\sigma_2 + 2\sigma_3 + \cdots + m\sigma_{m+1}} \qquad (|q| < 1,\ \sigma_1 = 0, 1). \tag{3.1 a}$$

ただしここで，右辺の外側の和は，$\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_m \in \{0, 1\}$ のうち，

$$\sigma_i \sigma_{i+1} = 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, \cdots, m \tag{3.1 b}$$

という制限条件をみたすもののみについての和です．この条件により (3.1 a) は σ_1 に依存するわけで，それがなかったらつねに $F(0, q) = F(1, q) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^m)$ となってしまうことに注意してください．(3.1 b) は Hard hexagon が隣り合えないという性質から由来します．(3.1) から定まる $F(0, q)$, $F(1, q)$ を用いて，1点関数は

$$\rho_r = \frac{yF(1, x^6)}{F(0, x^6) + yF(1, x^6)}, \qquad y = -x\frac{G(x)}{H(x)} \tag{3.2}$$

と求められます．ただし x は (2.6 a) で導入されたものです．このような顕著な書き換え (2.2) → (3.2) が可能なのは，もちろん模型が可解であることの表れなのですが，どう実行するかは 5° 節で触れることにします．重要なのは，前者は2次元状態和による単なる定義式だったのに対し，後者では $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ という1次元の配置 (図3) にわたる和 (3.1) に帰着していることです．

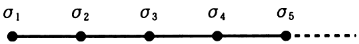


図3

この意味で，$F(0, q)$, $F(1, q)$ を1次元状態和と呼ぶことにします．これらは Hard hexagon 模型の排斥条件 (3.1 b) から特徴づけられる固有の無限級数で，1点関数の表示式 (3.2) の最も本質的な構成要素といえます．(3.1 a) で

σ_1 を 0, 1 に固定し，(3.1 b) をみたすように，Hard hexagon を1個，2個と順次導入していくと，簡単な計算で次のような表示も得られます.

$$F(0,q) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}, \tag{3.3 a}$$

$$F(1,q) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}. \tag{3.3 b}$$

さて，ここに現れた右辺は驚くべきことに，有名な Rogers-Ramanujan 恒等式の sum-side になっています．すなわち，無限級数 (3.3) と無限積 (2.7 a,b) の間に等式

$$F(0,q) = G(q), \qquad F(1,q) = H(q) \tag{3.4}$$

が成立するというのが Rogers-Ramanujan 恒等式です．これは Rogers が1894年に証明した後，1913年頃までに Ramanujan が独立に予想したというお話でも有名で，発見からほぼ100年を経た現在もなお，さまざまな話題を提供し続けている恒等式です．Hard hexagon 模型との関わりはその典型的な例で，86年後に Baxter によりもたらされたことになります．可解格子模型の立場からすると，その役割は，1次元状態和 $F(0,q)$, $F(1,q)$ をモジュラー関数 (2.9) と (q の overall なベキを除いて) 同定せしめるところにあると言えます．(3.4) を (3.2) に代入して，知られている等式 $H(x)G(x^6)-xG(x)H(x^6)=\dfrac{P(x)}{P(x^3)}$ を適用すると (2.6 b) に達します．結局，Rogers-Ramanujan 関数 (2.7 a, b) が1次元状態和 (3.1) という combinatorial な表示をもつということが，1点関数の計算にまさにフィットしたことになります.

このようなうまい event は Hard hexagon 模型だけの例外的な偶然なのでしょうか．イジング模型でも1点関数は exact に求まっていたわけで，これらの結果の間には関係があるのでしょうか．次節で見るように，実はイジングと Hard hexagon 模型は，ヤン-バクスター (Yang-Baxter) 方程式の解という立場からは自然に，ある可解格子模型の系列の「最初の」二つのメンバーになっているといえるのです.

4° ヤン-バクスター方程式

再び $\mathcal{L}$ を2次元の正方格子とし，その上に次のような模型を考えます．まず $\mathcal{L}$ の各格子点 i 上に

$$\sigma_i \in \{1, 2, \cdots, L-1\} \tag{4.1}$$

という値をとるスピン σ_i をわりふります．ここで L は4以上の任意の整数で，値を一つ固定しておきます．$\mathcal{L}$ の二つの格子点 j と k が最隣接点のときはその上のスピンに

$$\sigma_j = \sigma_k + 1 \qquad \text{または} \qquad \sigma_j = \sigma_k - 1 \tag{4.2}$$

という条件が課されているとします．基本となる相互作用は図4のように $\mathcal{L}$ の各 face（網点をつけた正方形）のまわりの四つのスピン $\sigma_j, \sigma_k, \sigma_l, \sigma_m$ の間で起こるとします．

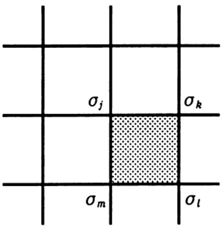


図4

すなわち，そのボルツマン重率を $W\begin{pmatrix} \sigma_j & \sigma_k \\ \sigma_m & \sigma_l \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}$ と書くと，分配関数が

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\text{faces}} W\begin{pmatrix} \sigma_j & \sigma_k \\ \sigma_m & \sigma_l \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

で与えられ，配置 $\{\sigma_i\}$ の実現する相対確率が，和 (4.3) の各項に比例するという設定です．(4.2) から一つの face のまわりのスピンの四つ組は6タイプあって，その各々のボルツマン重率を以下のように指定します．

$$W\begin{pmatrix} \sigma & \sigma\pm 1 \\ \sigma\pm 1 & \sigma\pm 2 \end{pmatrix} = \frac{[1+u]}{[1]} \qquad 2\mp 1 \le \sigma \le L-2\mp 1,$$

$$W\begin{pmatrix} \sigma & \sigma\pm 1 \\ \sigma\mp 1 & \sigma \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{[\sigma+1][\sigma-1]}{[\sigma]^2}}\,\frac{[u]}{[1]} \qquad 2 \le \sigma \le L-2, \tag{4.4}$$

$$W\begin{pmatrix} \sigma & \sigma\pm 1 \\ \sigma\pm 1 & \sigma \end{pmatrix} = \frac{[\sigma\mp u]}{[\sigma]} \qquad \frac{3\mp 1}{2} \le \sigma \le \frac{2L-3\mp 1}{2}.$$

これ以外のスピンの四つ組に対しては W は恒等的に 0 と約束しておきます．(4.4) で記号 $[u]$ は次のような Jacobi の楕円テータ関数です．

$$[u] = 2p^{1/8}\sin\frac{\pi u}{L}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2p^n\cos\frac{2\pi u}{L}+p^{2n}\right)(1-p^n) \qquad (|p|<1). \tag{4.5}$$

ボルツマン重率は，イジングのときは $\exp\left(\frac{J_{1,2}}{k_BT}\right)$ で，Hard hexagon のときは z で表示されていたことを思い出してください．いまの場合，相互作用を規定するボルツマン重率 $\{W(\cdot)\}$ の勝手な選び方のうち，2変数 u と p により (4.4)，(4.5) で parametrize される一部分のみを考えよ，と言ってるわけです．以下では p を固定し，(4.4) を u の関数とみなして $W_u(\cdot)$ と書きます．すると，次のことが成立します．

定理　任意の複素数 u, v と $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, \cdots, L-1\}$ につき，

$$\sum_{g=1}^{L-1} W_v\begin{pmatrix} f & g \\ e & d \end{pmatrix} W_u\begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} W_{u-v}\begin{pmatrix} b & c \\ g & d \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{g=1}^{L-1} W_v\begin{pmatrix} a & b \\ g & c \end{pmatrix} W_u\begin{pmatrix} g & c \\ e & d \end{pmatrix} W_{u-v}\begin{pmatrix} a & g \\ f & e \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

これはいわゆるヤン-バクスター方程式といわれるもののひとつの version で star-triangle relation（スター三角関係？）とも呼ばれます．g による和は条件 (4.2) のために実際は，各辺で高々2項にしかなりません．それに (4.4) を代入した式は，加法定理

$$[u+x][u-x][v+y][v-y] = [u+y][u-y][v+x][v-x] + [u+v][u-v][x+y][x-y]$$

を用いて容易に証明されます．(4.6) は図５のような絵にすると見やすくなります．

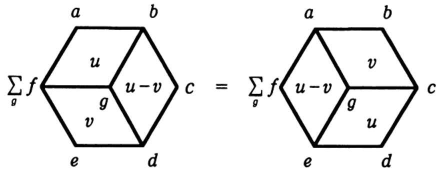


図5

すなわち，$W_u(\cdot)$ を u を書き込んだ face で表わし，それが並べて描かれていたら積をとるという規約です．

ヤン-バクスター方程式は，1 + 1 次元の可積分な場の理論や可解格子模型の理論において中心的役割を担うものです．その重要性はもともとこれらの研究から認識され始めましたが，その後 量子群 等の数学的構造と結びついて，いまや非常に広く深く知識が集積し，それは現在も進行中です．詳しくは本書中の他の関連記事や文献 [6] などを参考にしてください．ここではもっぱら可解格子模型の立場から practical な説明だけをすると，(4.6) は，転送行列と呼ばれる行列 $T(u)$ が可換な family をなす，すなわち

$$T(u)T(v) = T(v)T(u) \qquad \forall\, u, v \in \boldsymbol{C} \tag{4.7}$$

となるための十分条件になっています．ここで $T(u)$ は先の規約を用いて，図6により成分ごとに定義されるものです．

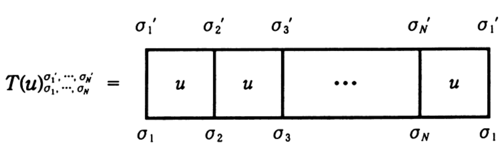


図6

ここで，σ_i, σ_i' は (4.1)，(4.2) に従い，N 個のスピン $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ が行列の一つの足をラベルします．N は任意の正偶数で，正方格子 $\mathcal{L}$ の横サイズです．σ_1, σ_1'

が両端にあるのは横方向の周期的境界条件と思ってください．（行列の作用の向きはたとえば下から上と決めておく．）以上の $T(u)$ の定義とヤン-バクスター方程式（4.6）（または図5）から（4.7）を示すのは簡単な練習問題で，具体形（4.4），（4.5）を使わずにできます (cf. [2])．さて $\mathcal{L}$ のサイズが縦 M，横 N とすると，分配関数（4.3）は（縦横とも周期的境界条件として）$Z = \mathrm{Tr}(T(u)^M)$ で与えられることは，図6から容易に想像できるでしょう．したがって，分配関数の計算は“転送行列の対角化問題”に帰着します．このこと自体は統計力学で広く用いられる常套手段の一つですが，いまの場合顕著な点は，ヤン-バクスター方程式のおかげで可換性（4.7）が成立し，そこから分配関数や1点関数などを exact に求める道が開かれるところにあります．0° 節で言及した「本稿で考えるクラスの可解格子模型」とは，まさにこのような性質をもつもののことで，標語的には，ヤン-バクスター方程式の解があるごとにそれをボルツマン重率と思って可解格子模型がつくれる，ということになります．ただし，解があるごとにといっても実際は，よい性質をもったものでないと「道が開かれ」ませんし，またある場合には模型として物理的にも興味ないものになります．（どう道が開かれるか興味ある読者はぜひ文献 [2] をご覧ください．）そういう意味で我々が実質上対象とするのはヤン-バクスター方程式の「よい性質」をもつ解とそれに付随する可解格子模型ということになります．解（4.4）はその典型的な例で，8-vertex solid-on-solid (SOS) 模型 [5] と呼ばれます．これは $L-1$ 状態/スピン の可解格子模型で，$L = 4, 5, \cdots$ に応じて系列をなします．さてこれが前節までの話とどう関係するかというと，実は $L = 4$ はイジング模型に，$L = 5$ かつ（4.4）で $u = 1$ の場合は Hard hexagon 模型に実質上同等になります．これは一見不思議ですが，条件（4.1），（4.2）をみたす配置の例をつくってみると，ちょっとした考察からわかります．（ヒント：$\mathcal{L}$ に斜線を入れて三角格子にすると，$L = 5$ の SOS と Hard hexagon 模型の配置には 2:1 の対応がつく．）こうしてイジングも Hard hexagon もヤン-バクスター方程式に従う模型ということになります．

5° 角転送行列法とその後

Baxter はヤン-バクスター方程式の解がいくつかの付帯条件をみたすとき，1点関数を（3.1）のような1次元状態和の計算に帰着させる一般的方法を開発しました．これは角転送行列法と呼ばれ，6-vertex 模型をはじめ，前節の一般の L に相当する SOS 模型に適用され [5]，結果（1.4）と（2.6）は統合，拡張されました．

一方これらの模型は，ヤン-バクスター方程式の解という観点からは，ある意味で，$U_q(\widehat{sl}(2))$ と呼ばれる量子群（量子アフィン・リー代数）の2次元表現に付随しています．その後，高次元表現に相当するいくつかの例の発見 [7, 8] を契機に，さまざまな代数およびその表現の場合へと組織的に拡張され，それらの1次元状態和にアフィン・リー代数の指標（ストリング関数，分岐係数など）が現れることが示されました [9]．これらはみなモジュラー変換性をもち，それを用いて共形場理論の予言する universality class を実現することが示されます．こうして Onsager-Yang 以来集積してきた1点関数の結果の多くに，表現論的な意味付けと，共形場理論との関係が与えられました．これらは主に80年代後半の進展ですが，その後いわゆる crystal base の理論 [10] によって，より内在的な理解も得られています [11]．これは，図3のような，可解格子模型の半無限1次元配置と，量子アフィン・リー代数のあるクラスの表現の基底とに 1:1 対応があることを示すもので，1次元状態和が指標になることを自然に説明します．

6° 結　び

本稿で垣間見たのは1点関数をめぐる研究の一つの流れです．その水源にある可解格子模型からは，他にも大きな川がたくさん流れ出ていて，それらが幾重にも交差している様が研究の全体像というべきものでしょう．そこには，量子逆散乱法，「代数的 …」，「解析的 …」，「熱力学的 …」など，種々の version の

Bethe 仮説法，転送行列の関数方程式，Painlevé 超越関数，量子群の「楕円関数版」(Sklyanin 代数など)，種数2以上の curve に付随する模型 (Chiral Potts など)，絡み目や3次元多様体の不変量への応用，ヤン-バクスター方程式の高次元版である simplex 方程式，dilogarithm 恒等式，q-頂点演算子などなど，本稿ではまったく触れなかった重要なサブジェクトが密接に連携しています．Bethe の論文からちょうど70年目となる21世紀の初めには，さらにどんな話題が加わっているでしょうか，そしてそれらの川はどこまで流れていっているでしょうか．

おわりに，本稿の作成にあたって貴重な意見を寄せていただいた鈴木淳史氏に感謝いたします．

参考文献

[1] H. A. Bethe, *Z. Physik* **71** (1931), 205.

[2] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[3] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65** (1944), 117.

[4] C. N. Yang, *Phys. Rev.* **85** (1952), 808.

[5] G. E. Andrews, R. J. Baxter and P. J. Forrester, *J. Stat. Phys.* **35** (1984), 193.

[6] M. Jimbo ed, *Yang-Baxter equation in integrable systems*, (Adv. Ser. Math. Phys. vol. 10) World Scientific.

[7] A. Kuniba, Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986), 1092, 2605.

[8] R. J. Baxter and G. E. Andrews, *J. Stat. Phys.* **47** (1986), 249, 713.

[9] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, *Nucl. Phys.* **B290** [FS20] (1987), 231, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 69.

[10] M. Kashiwara, *Duke. Math. J.* **63** (1991), 465.

[11] M. Jimbo, K. C. Misra, T. Miwa and M. Okado, *Commun. Math. Phys.* **136** (1991), 543.

第4話

確率論から見たスピン系の相転移

黒田耕嗣

0° はじめに

統計力学とは1モルの気体といった多数の粒子からなる系の巨視的な挙動を統計的手法を用いて解析することである．ここで述べることは統計力学の手法を数学的に定式化し，平衡状態にあるスピン系の相転移現象が数学的にどのようにとらえられているのかを見ていくことである．

物理系が巨視的にみて時間の経過に関して不変となっている状態を平衡状態と呼び，平衡状態が二つ以上存在するとき「相共存が起こっている」とか「相転移が起こっている」とか言う．これから，この平衡状態について考えていこう．まず物理系が置かれている場を格子にとり，各格子点にスピンが置かれているとする．古典力学的にみればスピンとは自転であって，格子点上に置かれた電子が自転することにより磁石となり，これらが互いに相互作用していると考える．特に，隣接する格子の電子の間にスピンの向き（自転の向き）を同じ方向にそろえようとする相互作用が働くとき，このスピン系は強磁性イジング・モデルであると呼ばれる．この相互作用が強いときには系の多くのスピンが一つの方向にそろい，全体として磁性を帯びることになる．このとき，自発磁化が起こっているとか相転移が起こっているとか言う．

相転移現象を確率論的な立場から研究しようとする試みは，Dobrushin（ドブリューシン），O. Lanford（ランフォード），D. Ruelle（ルエール）によるギブス測度（DLR 測度）の導入に始まる．これは相互作用が働いているスピン系の平衡状態を確率測度で表し，このような確率測度全体からなる集合 $\mathcal{G}_\beta$（β：逆数温度）の構造を調べることにより相転移現象を解析しようとするものであっ

た．$\mathscr{G}_\beta$ が二つ以上の元からなるとき，相共存が起こっているとか相転移が起こっているとか言う．この $\mathscr{G}_\beta$ の構造についての研究がいろいろとなされたが，特に2次元イジング・モデルについては $\mathscr{G}_\beta$ の構造が完全に決定された (Aizenman [13], Higuchi [12])．その後 Pirogov と Sinai (Sinai [3], Pirogov-Sinai [5, 6]) により $\mathscr{G}_\beta$ の構造決定問題が一般的に議論されるようになった．

1° 節においては，ギブス測度の定義およびギブス測度の集合 $\mathscr{G}_\beta$ についての性質について述べる．この節で述べられる定理の証明など，詳しいことは宮本 [1], Israel [10] などを参照されたい．2° 節においてはイジング・モデルについて得られている結果を概観する．この節における2次元イジング・モデルの詳しい話は樋口 [2, 12], Aizenman [13] を参照されたい．また，3次元イジング・モデルについては Dobrushin [8], Bricmont - Lebowitz - Pfister - Olivieri [11] を参照されたい．3° 節では，Pirogov - Sinai の相転移理論とはどのようなものであるのかを説明する．この節の詳しい話は，Sinai [3], Pirogov - Sinai [5, 6] および Zahradnik [18], Brickmont - Kuroda - Lebowitz [20, 21] を参照されたい．

1° ギブス測度とは何か

$\boldsymbol{Z}^d$ を d 次元平方格子とする．この格子点の各点に粒子が配置されていて，各粒子は有限個のスピン状態をとるとする．このスピン状態の集合を $S=\{s_1, \cdots, s_n\}$ とする．このとき，$\boldsymbol{Z}^d$ 上の粒子のスピン配置は写像

$$\omega : \boldsymbol{Z}^d \to S$$

で与えられる．$\omega(t)=s_i$ であるとは，$t \in \boldsymbol{Z}^d$ に置かれた粒子のスピン状態が s_i ということである (図1参照)．このようなスピン配置全体の集合を配置空間と呼び，Ω で表す．これからこの Ω 上にスピン系の平衡状態を表す確率測度を定義するのであるが，その前に少し数学の準備をしておく．V を $\boldsymbol{Z}^d$ における有界集合とする．たとえば，一辺が L の立方体のようなものを考えておけば十分である．V 上の配置空間を Ω_V で表し，V 内における有限個の格子点上でのスピ

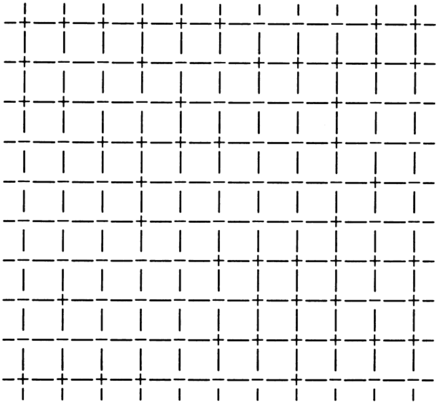


図1　$\boldsymbol{Z}^2$ 上のスピン配置

ン配置を表すシリンダー集合

$$\{\omega \in \Omega_V\,;\ \omega(t_1) = s_{i_1},\ \cdots,\ \omega(t_k) = s_{i_k}\} \qquad (t_1, \cdots, t_k \subset V)$$

の全体を含む σ-加法族を $\mathcal{F}_V$ で表す．$\mathcal{F}_V$ は V 内の事象の全体を表していると考えられる．$V = \boldsymbol{Z}^d$ のときの σ-加法族を $\mathcal{F}$ で表す．一般に $\mathcal{M}$ が集合 X 上の σ-加法族であるとは，X の部分集合族であって

(i)　$X, \phi \in \mathcal{M}$

(ii)　$A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

(iii)　$A_j \in \mathcal{M}\ (j = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$

をみたすものである (詳しくは伊藤 [22] を参照)．次に，$\xi \in \Omega_V$, $\omega \in \Omega$ に対して

$$H_{V,\omega}(\xi) = \sum_{W \subset \boldsymbol{Z}^d;\, W \cap V \neq \phi} \Phi_W(\xi \cdot \omega)$$

でもって V 内のスピン配置が ξ で V の外側のスピン配置が ω であるとき V 内の粒子たちのもつエネルギーを定める．ここで，$\xi \cdot \omega$ は

$$\xi \cdot \omega = \begin{cases} \xi(t) & t \in V \text{ のとき} \\ \omega(t) & t \in V^c \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる $\boldsymbol{Z}^d$ 上のスピン配置で，Φ_W は W 上のスピン配置で定まる関数である．このとき，$\{\Phi_W\}_{W:\text{有限}}$ に関して次の条件をおく．

(1)　$\sum_{W:\text{有限}} \sup_{\sigma \in \Omega_W} |\Phi_W(\sigma)| < \infty$

(2)　$\Phi = \{\Phi_W\}_W$ は平行移動に関して不変

例　イジング・モデル

相互作用が次で与えられるモデルをイジング・モデルと呼ぶ．

$$\Phi_W(\sigma) = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_j & W = \{i, j\} \text{ のとき} \\ h\sigma_i & W = \{i\} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

ここで，$J > 0$ のとき強磁性的であるといい，$J < 0$ のとき反強磁性的であるという．また，$h \in \boldsymbol{R}$ は外部磁場と呼ばれる．このモデルについては 2° 節で詳しく述べる．

定義 1.1　相互作用が上の (1), (2) の条件をみたすとき，V 内のスピン系の平衡状態を表す確率測度として

$$P_{V,\omega}(\xi) = \frac{1}{Z_{V,\omega}} \exp\{-\beta H_{V,\omega}(\xi)\}$$

となるものを考える．これを境界条件 ω をもつ V における有限ギブス測度と呼ぶ．ここで，$\beta = \dfrac{1}{kT}$ であり，k はボルツマン定数で T は絶対温度である．

β は相互作用の強さをコントロールするパラメーターと考えられ，β が大きいとき（低温状態）には相互作用の影響が大きくなり，β が小さいとき（高温状態）には相互作用の影響が小で各スピンは独立に近い振舞いをする．

さらに，無限領域における平衡状態を表す確率測度を次で定める．

定義 1.2　$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $P(\cdot)$ が次の条件をみたすとき，**ギブス測度**と呼ぶ．

任意の有限集合 V に対して，

$$(*)\quad P(A \cap B) = \int_B P(d\omega) P_{V,\omega}(A)$$

が任意の $A \in \Omega_V$, $B \in \Omega_{V^c}$ について成立する．

ここで，$A \cap B$ は V 内のスピン配置に関する条件が A で，V の外側での条件が B となる事象を表している．また，条件（＊）を条件付き期待値の言葉で表現すれば

（＊＊）　$P(\cdot|\mathcal{F}_{V^c})(\omega) = P_{V,\omega}(\cdot) \quad P\text{-a.e. } \omega$

となる．このギブス測度の全体を $\mathcal{G}_\beta$ で表す．

$\#\mathcal{G}_\beta \geq 2$ となるとき，相転移が起こっているとか相共存が起こっているとか言う．

定理 1.1　$\mathcal{G}_\beta$ は空でない凸集合で，弱収束の位相に関してコンパクトとなる．

この定理により，$\mathcal{G}_\beta$ は端点によって表現されるということがわかる．ここで，$P(\cdot) \in \mathcal{G}_\beta$ が $\mathcal{G}_\beta$ の端点であるとは

$$P(\cdot) = \lambda P_1(\cdot) + (1-\lambda)P_2(\cdot) \qquad P_1(\cdot), P_2(\cdot) \in \mathcal{G}_\beta,\ 0 < \lambda < 1$$
$$\Rightarrow P_1(\cdot) = P_2(\cdot) = P(\cdot)$$

が成り立つことであり，$\mathcal{G}_\beta$ の端点の全体を $ext\,\mathcal{G}_\beta$ で表す．2 次元イジング・モデルにおいては，低温のとき $ext\,\mathcal{G}_\beta$ は二つの確率測度 μ^+, μ^- からなり，任意の $P \in \mathcal{G}_\beta$ は

$$P = \lambda\mu^+ + (1-\lambda)\mu^- \qquad (0 < \lambda < 1)$$

という形に書かれる．このように $\mathcal{G}_\beta$ の構造を知るには $ext\,\mathcal{G}_\beta$ の構造がわかればよいのである．

また，$P \in ext\,\mathcal{G}_\beta$ は有限ギブス測度 $P_{V,\omega}$ の $V \to \mathbf{Z}^d$ としたときの極限として表される．$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \uparrow \mathbf{Z}^d$ となる単調増大列 $\{V_n\}$ を一つとると，ある $\omega \in \Omega$ が存在してすべてのシリンダー集合 A に対して

$$Q_\omega(A) = \lim_{n\to\infty} P_{V_n,\omega}(A)$$

が存在する．これは Kolmogorov の拡張定理により $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度に拡張され，さらに $\mathcal{G}_\beta$ の端点になる．

次に，ギブス測度の別の同等な定義について考えてみよう．P を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とし，$P_V(\cdot)$ を P の $(\Omega_V, \mathcal{F}_V)$ への制限とする．（$A \in \mathcal{F}_V$ に対して

$P_V(A)=P(A)$ と定める.）このとき

$$S(P_V) = -\sum_{\omega\in\Omega_V} P_V(\omega)\log P_V(\omega)$$

によって，有限領域におけるエントロピーを定める．V を一辺が L の立方体とし，$L\to\infty$ となる極限をとると

$$\lim_{L\to\infty}\frac{S(P_V)}{|V|} = s(P)$$

なる極限が得られる．（証明は Ruelle［4］, Israel［10］を参照.）

相互作用 Φ に対して

$$A_\Phi(\omega) = \sum_{W\ni O}\frac{\Phi_W(\omega_W)}{|W|}$$

とおく．ここで，ω_W は $\omega\in\Omega$ の W への制限であり，和は原点 O を含むすべての有限集合 W にわたってとられる．この Ω 上の関数 A_Φ の P による期待値を $P(A_\Phi)$ で表そう．

さらに，確率測度 $P(\cdot)$ に対して自由エネルギー $F(P)$ を

$$F(P) = s(P) - P(A_\Phi)$$

で定義する．

定義 1.3　$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P が変分原理をみたすとは,

$$F(P) = \sup_{\tilde{P}} F(\tilde{P})$$

が成り立つことである．すなわち，$P(\cdot)$ は自由エネルギーを最大にするものである．

定理 1.2　$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $P(\cdot)$ について，次の (1) と (2) とは同値である．

(1)　$P(\cdot)$ はギブス測度である．

(2)　$P(\cdot)$ は変分原理をみたす．

この定理により，ギブス測度は変分原理をみたす測度として特徴づけられる．

2° イジング・モデル

イジング・モデルは磁性体の相転移を解析するモデルとして最もよく研究されてきたモデルである．この節においては，このモデルを確率論的側面からとらえてみよう．このモデルは1次元においては相転移が起こらず，2次元においてはある臨界点 $\beta_c(2)>0$ が存在して $\beta>\beta_c(2)$ では $ext\,\mathcal{G}_\beta$ は二つの確率測度からなることがわかっている．3次元においても臨界点 $\beta_c(3)<\beta_c(2)$ が存在して $\beta>\beta_c(3)$ では相転移が起こっていることがわかる．さらに，$\beta>0$ が十分に大きいときには $ext\,\mathcal{G}_\beta$ は無限個の確率測度からなることがわかっている．この問題は3次元イジング・モデルの界面の確率的な挙動と密接に結びついており，$\beta_c(3)$ とは別の臨界点 $\beta_R>\beta_c(3)$ が存在して $\beta>\beta_R$ では界面は揺動せず $ext\,\mathcal{G}_\beta$ は無限個の測度からなり，$\beta_c(3)<\beta\leq\beta_R$ では界面は揺動し $ext\,\mathcal{G}_\beta$ は2次元と同様にただ二つの測度からなることが予想されている．この β_R をラフニング・ポイントと呼ぶ．

◆2次元イジング・モデル◆

$V\subset \boldsymbol{Z}^2$ を正方形とし，$\xi\in\Omega_V$，$\omega\in\Omega$ に対して相互作用エネルギー $H_{V,\omega}(\xi)$ が

$$H_{V,\omega}(\xi) = -J\sum_{i,j\in V:\,|i-j|=1}\xi(i)\xi(j) - J\sum_{i\in V,\,j\in V^c:\,|i-j|=1}\xi(i)\xi(j) - h\sum_{i\in V}\xi(i)$$

で与えられるモデルが2次元イジング・モデルである．特に，$J>0$ となるとき強磁性イジング・モデルと呼ぶことは前に述べたとおりである．以後，この強磁性イジング・モデルだけを考える．また，h は外部からの磁場を表している．ところが，李政道・揚振寧の定理により $h\neq 0$ のときにはギブス測度の集合 $\mathcal{G}_\beta$ はただ一つの測度からなることがわかっている．すなわち，$h\neq 0$ のときには相転移が起こらないのである．このことをもう少し詳しく述べれば，$\mathcal{G}_\beta$ がただ一つの測度からなるということとギブスの自由エネルギーが化学ポテンシャルに対して微分可能であることとが必要十分であり，李政道・揚振寧の定理は $h\neq 0$ のときにはギブスの自由エネルギーが解析的であることを示している．

以後，外部磁場 $h=0$ となる場合について相転移の問題を考えよう．そこで，

次の二つの特別な境界条件 ω_+, ω_- を考える.

$$\omega_+(t) = 1, \quad \omega_-(t) = -1 \qquad (t \in \boldsymbol{Z}^2)$$

すべての $t \in \boldsymbol{Z}^2$ に対して, $\omega_1(t) \leq \omega_2(t)$ が成り立つとき $\omega_1 \leq \omega_2$ と定め,

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Rightarrow f(\omega_1) \leq f(\omega_2)$$

が成り立つ関数 f を単調増加関数と呼ぶ.

補題 2.1　(1)　境界条件 ω_+, ω_- に対する極限ギブス測度

$$\lim_{L \to \infty} P_{V, \omega_+}(\cdot) = P_+(\cdot)$$

$$\lim_{L \to \infty} P_{V, \omega_-}(\cdot) = P_-(\cdot)$$

が存在する.

(2)　任意のギブス測度 P と単調増加関数 f に対して

$$P_-(f) \leq P(f) \leq P_+(f)$$

が成り立つ. ここで, V は一辺が L の正方形とする.

◆パイエルスの方法◆

境界条件 ω_+ の下で V 上のスピンの配置 ξ を与え, スピン状態が -1 となる格子点を中心にして単位長さの正方形をかき, このようなすべての正方形に斜

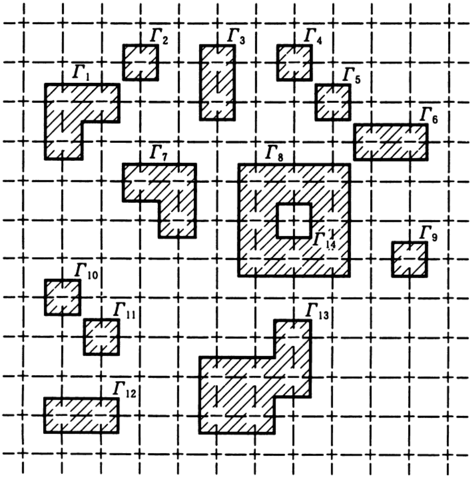


図2　コントゥアーによるスピン配置の表現

線を入れる．すると，ξ に対して斜線部からなる図形 $\Lambda(\xi)$ が得られる．この $\Lambda(\xi)$ の境界はいくつかの閉じた折れ線の組 $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ に分解できる．この閉じた折れ線を **コントゥアー** と呼ぶ．このようにして $\xi\in\Omega_V$ はコントゥアーの組で表現できるのである．さらに，$2J=1$ としスピン配置 $\xi\in\Omega_V$ の下でのコントゥアーの全体を $\mathscr{C}(\xi)$ で表すと

$$P_{V,\omega_+}(\xi) = \frac{1}{Z_{V,\omega_+}} \exp\left\{-\beta \sum_{\tilde{\Gamma}\in\mathscr{C}(\xi)} |\tilde{\Gamma}|\right\}$$

となる．ここで，$|\tilde{\Gamma}|$ は Γ の長さである．

一つのコントゥアー Γ をとり，この Γ が出現するスピン配置 $\xi\in\Omega_V$ の全体を $\mathscr{M}(\Gamma)$ と表し，

$$\begin{aligned}\rho_V(\Gamma) &= P_{V,\omega_+}(\mathscr{M}(\Gamma))\\ &= \frac{1}{Z_{V,\omega_+}} \sum_{\xi\in\mathscr{M}(\Gamma)} \exp\left\{-\beta \sum_{\tilde{\Gamma}\in\mathscr{C}(\xi)} |\tilde{\Gamma}|\right\}\end{aligned}$$

によって，コントゥアーの相関関数 $\rho_V(\Gamma)$ を定義する．

任意の $\xi\in\mathscr{M}(\Gamma)$ に対して ξ の下では必ずコントゥアー Γ が現れるということに注意し，$\xi\in\mathscr{M}(\Gamma)$ に対してコントゥアー Γ の内側のスピンはそのままで，外側のスピンを反転させたスピン配置を $f\xi$ で表すと，f は $\mathscr{M}(\Gamma)$ から Ω_V への1対1の写像となり

$$\mathscr{C}(f\xi) = \mathscr{C}(\xi)\setminus\Gamma$$

となる．つまり f はコントゥアー Γ を消す写像となり

$$\begin{aligned}\rho_V(\Gamma) &= \exp\{-\beta|\Gamma|\} \frac{\displaystyle\sum_{\xi\in f(\mathscr{M}(\Gamma))} \exp\left\{-\beta \sum_{\tilde{\Gamma}\in\mathscr{C}(\xi)} |\tilde{\Gamma}|\right\}}{\displaystyle\sum_{\xi\in\Omega_V} \exp\left\{-\beta \sum_{\tilde{\Gamma}\in\mathscr{C}(\xi)} |\tilde{\Gamma}|\right\}}\\ &\le \exp\{-\beta|\Gamma|\}\end{aligned}$$

となる．

次に O を V の中心の格子点とし，O におけるスピンの状態が -1 となるスピン配置を考えると，図3からも明らかなように O を囲むコントゥアーが出現しなくてはならない．したがって，次のような評価が成り立つ．

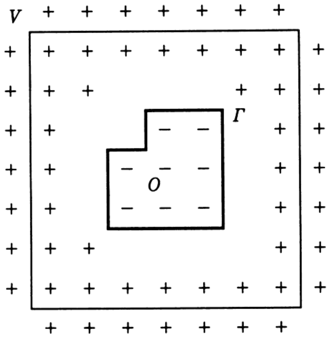


図3　O を囲むコントゥアーの出現

$$P_{V,\omega_+}(\xi(O)=-1) \le \sum_{\Gamma:O\text{を囲む}} \rho_V(\Gamma)$$

$$\le \sum_{\Gamma:O\text{を囲む}} \exp\{-\beta|\Gamma|\}$$

$$\le \sum_{k=4}^{\infty} k^2 3^k \exp\{-\beta k\}$$

ここで，ある点を通り長さが k となるコントゥアーの数は高々 3^k であるということを用いている．

この評価と上の補題から，極限ギブス測度に関して

$$P_+(\xi(O)=-1) \le g(\beta)$$

なる評価が成り立つ．ここで，$g(\beta)=\sum_{k=4}^{\infty} k^2 3^k \exp\{-\beta k\}$ で，$\beta\to\infty$ のとき $g(\beta)\to 0$ となる．

また，+ と − の対称性から，極限ギブス測度 P_- に関して

$$P_-(\xi(O)=+1) \le g(\beta)$$

なる評価が成り立つ．

したがって，$g(\beta)<\dfrac{1}{2}$ となるくらい β が大きければ $P_+(\cdot)\neq P_-(\cdot)$ となる．このようにして，β が十分大きいときには $\mathscr{G}_\beta \ge 2$ となることが示され，相転移の存在が示された．以上述べた方法をパイエルスの方法と呼ぶ．

しかし，強磁性2次元イジング・モデルに関しては $\mathscr{G}_\beta$ の構造が次のように定まっている．

定理 2.1 (Aizenman [13], Higuchi [12])

(1) $\beta \le \beta_c(2) = \dfrac{1}{2J}\sinh^{-1}1$ のとき，相転移は起こらず $\#\mathscr{G}_\beta = 1$ となる．

(2) $\beta > \beta_c(2)$ のとき，$P_+(\cdot) \neq P_-(\cdot)$ で $ext\,\mathscr{G}_\beta = \{P_+(\cdot), P_-(\cdot)\}$ となる．

すなわち，$\mathscr{G}_\beta$ は次のように表される．

$$\mathscr{G}_\beta = \{\lambda P_+(\cdot) + (1-\lambda)P_-(\cdot)\ ;\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

3° Pirogov - Sinai の理論

この節では，$\mathscr{G}_\beta$ の構造を調べる一般的方法である Pirogov - Sinai の理論について述べる．1° 節で与えた格子スピン系の相互作用 $\mathscr{H} = \{\Phi_W\}_W$ に対して，さらに次の条件を仮定しよう．

(A-1) ある $d_0 > 0$ という値が存在して，次が成立する．

$$\Phi_W \equiv 0 \qquad (d(W) > d_0 \text{ のとき})$$

ここで，$d(W) = \max\{|t-s|\ ;\ t, s \in W\}$ で，$|t| = \max\{|t_1|, |t_2|, \cdots, |t_d|\}$ である．

条件 (A-1) の意味することは，相互作用のおよぶ範囲は距離が d_0 よりも小さい領域に限られるということである．

◆周期的な基底状態◆

ψ と ζ に対して，$\mathbf{Z}^d$ の有限領域 U が存在して

$$\psi(t) = \zeta(t) \qquad (t \in \mathbf{Z}^d \setminus U)$$

が成り立つとき，すなわち有限個の点を除いて ψ と ζ とが一致するとき，ψ と ζ とはほとんど至るところ等しいと呼ぶことにしよう．ほとんど至るところ等しい ψ と ζ に対して

$$H(\psi|\zeta) = \sum_{W \subset \mathbf{Z}^d} [\Phi_W(\psi_W) - \Phi_W(\zeta_W)]$$

とおく．ここで，和はすべての有限集合 W にわたってとられるものとする．ψ

とζは有限個の点を除いて一致するので，この和は有限和となる．

また，一点 $x \in \boldsymbol{Z}^d$ にかかわるφの平均エネルギーを

$$U_x(\varphi) = \sum_{W \ni x} \frac{1}{|W|} \Phi_W(\varphi_W)$$

によって定義すると，

$$H(\varphi|\psi) = \sum_{x \in \boldsymbol{Z}^d} [U_x(\varphi) - U_x(\psi)]$$

となる．

$\psi \in \Omega$ とほとんど至るところ一致する任意の ζ ($\psi \neq \zeta$) に対して

$$H(\zeta|\psi) > 0$$

が成り立つとき，ψ を基底状態と呼ぶ．

また，スピン配置 ψ をある $a \in \boldsymbol{Z}^d$ だけ平行移動させたとき，それがまた ψ と一致するとき ψ は周期的であるという．周期的なスピン配置 ψ に対しては，一格子点あたりの平均エネルギー

$$h(\psi) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{|W_s(O)|} \sum_{x \in W_s(O)} U_x(\psi)$$

が定義できる．

相互作用 $\mathscr{H} = \{\Phi_W\}_W$ に対する周期的な基底状態の全体を $G(\mathscr{H})$ で表す．

いま，ある相互作用 $\mathscr{H}_0$ を考え，条件（A-1）に加えて次の条件（A-2）がみたされているとしよう．

(A-2)　$G(\mathscr{H}_0)$ は有限個のスピン配置 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r$ よりなる．

$$\text{i.e.}\quad G(\mathscr{H}_0) = \{\psi_1, \cdots, \psi_r\}$$

◆パイエルスの条件◆

次に，Pirogov - Sinai の理論で最も重要な役割を果たすパイエルスの条件について述べることにしよう．そのためにいくつかの記号を導入する．

$s > d_0$ を正整数とし，$x \in \boldsymbol{Z}^d$ に対して

$$W_s(x) = \{t \in \boldsymbol{Z}^d;\ |t - x| \leq s\}$$

とおく．

$\varphi\in\Omega$ に対して φ の下でどの $\psi\in G(\mathscr{H}_0)$ とも一致しない領域を

$$\partial\varphi = \bigcup_{x\in Z^d}\{W_s(x)\ ;\ \text{任意の}\ \psi\in G(\mathscr{H}_0)\ \text{に対して}\ \varphi_{W_s(x)}\neq\psi_{W_s(x)}\}$$

とおく.

$\mathscr{H}_0$ がパイエルスの条件をみたすとは,

(A-3)　ある正数 $\rho>0$ が存在して，任意の $\psi\in G(\mathscr{H}_0)$ と ψ とほとんど至るところ一致する φ に対して

$$\mathscr{H}_0(\varphi|\psi) \geq \rho|\partial\varphi|$$

が成立することである.

◆フェイズ・ダイアグラム◆

この節では，$\mathscr{H}_0$ からの摂動として与えられる相互作用

$$\mathscr{H}_\mu = \mathscr{H}_0 + \sum_{k=1}^{r-1}\mu_i\mathscr{H}_i \qquad \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{r-1})$$

を考えよう．すなわち，$\mathscr{H}_0$ を中心とし，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_{r-1})\in \boldsymbol{R}^{r-1}$ で表される相互作用の空間 $\boldsymbol{R}^{r-1}$ を考えるのである.

このとき摂動が十分小さければ，$\mathscr{H}_\mu$ に関する周期的な基底状態の空間 $G(\mathscr{H}_\mu)$ は $G(\mathscr{H}_0)$ に含まれることがわかる．すなわち，ある $\mu_0>0$ が存在して，$|\mu|<\mu_0$ ならば $G(\mathscr{H}_\mu)\subset G(\mathscr{H}_0)$ となるのである.

さらに，相互作用の空間は次のように分割されていると仮定する.

$$O_r = \{a=(a_1,\cdots,a_r)\in \boldsymbol{R}^{r-1}\ ;\ \min_{1\leq q\leq r} a_q = 0\}$$

とおき，$\mathscr{H}_\mu$ に対する $\psi_i\in G(\mathscr{H}_0)$ の一格子点あたりの平均エネルギーを $h_\mu(\psi_i)$ で表し，$\mu\in\boldsymbol{R}^{r-1}$ に対して

$$t_\mu(\psi_i) = h_\mu(\psi_i) - \min_{1\leq j\leq r} h_\mu(\psi_j) \qquad (i=1,\cdots,r)$$

とおき，写像 $f:\boldsymbol{R}^{r-1}\to O_r$ を

$$f(\mu) = (t_\mu(\psi_1), \cdots, t_\mu(\psi_r))$$

で定める．$r=3$ のときの O_r は図4のように三つの直交した四半平面の和集合となる.

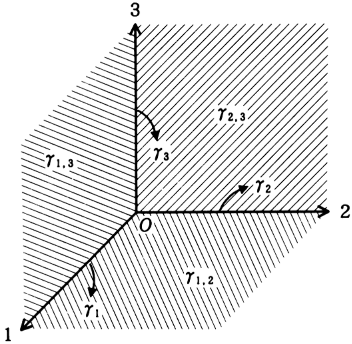


図4　O_r の図

このとき，$\mathscr{H}_\mu$ に対して次の条件を仮定する.

(A-4)　$f: \boldsymbol{R}^{r-1} \to O_r$ は全射である.

すなわち，$f(\mu)$ が O_r の第 i 軸に属する μ に対しては ψ_i 以外の $r-1$ 個の

$$\psi_1, \cdots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \cdots, \psi_r$$

が基底状態となり，第 i 軸と第 j 軸とで囲まれる2次元領域 $\gamma_{i,j}$ に $f(\mu)$ が属するときには，$\mathscr{H}_\mu$ に対して ψ_i, ψ_j 以外の $r-2$ 個の状態が基底状態となる．一般に O_r の k 次元領域 γ_B $(B=\{i_1, \cdots, i_k\})$ に $f(\mu)$ が属するときには，$\mathscr{H}_\mu$ に対して ψ_i $(i \in B)$ 以外の $r-k$ 個の状態が基底状態となる．またこのとき，γ_B の境界は

$$\bigcup_{j \in B} \gamma_{B \setminus \{j\}}$$

で与えられる.

以上述べたことを例を用いて説明してゆこう.

例1　$S=\{1, 2, 3\}$ として,

$$\Phi_W(\sigma) = \begin{cases} J_1 > 0 & W=\{i, j\},\ |i-j|=1 \text{ で } (\sigma_i, \sigma_j)=(1, 2) \text{ または } (2,1) \text{ のとき} \\ J_2 > 0 & W=\{i, j\},\ |i-j|=1 \text{ で } (\sigma_i, \sigma_j)=(2, 3) \text{ または } (3,2) \text{ のとき} \\ J_3 > 0 & W=\{i, j\},\ |i-j|=1 \text{ で } (\sigma_i, \sigma_j)=(3, 1) \text{ または } (1,3) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる相互作用 $\mathscr{H}=\{\Phi_W\}_W$ を考えよう.

この相互作用の下では，隣接しているスピンが同種であれば相互作用エネルギーは0となり，異なっていればそれぞれの状態に応じて $J_1>0, J_2>0, J_3>0$ の値をとる.

したがって

$$\psi_i(t) = i \qquad (t\in Z^d,\ i=1,2,3)$$

で与えられる ψ_1, ψ_2, ψ_3 が周期的基底状態となる.

この $\mathscr{H}=\{\Phi_W\}_W$ に

$$\Phi_W^1(\sigma) = \begin{cases} 1 & W=\{j\} \text{ で } \sigma_j = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\Phi_W^2(\sigma) = \begin{cases} 1 & W=\{j\} \text{ で } \sigma_j = 2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる相互作用 $\mathscr{H}_1=\{\Phi_W^1\}_W$, $\mathscr{H}_2=\{\Phi_W^2\}_W$ を摂動として与える.

$\mu=(\mu_1,\mu_2)$ とすると，$\mathscr{H}_\mu$ に関する周期的基底状態は図5のようになる.

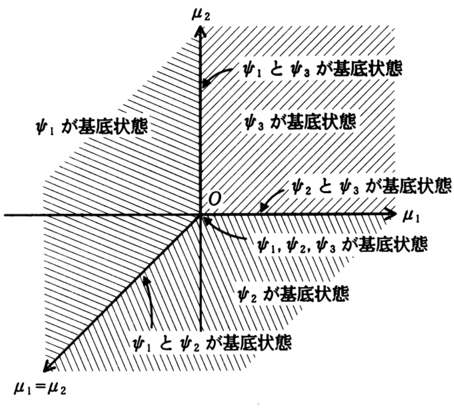


図5　周期的基底状態

◆コントゥアー・モデル◆

相互作用が (A-1) から (A-4) の条件をみたすとき，$\mathscr{H}_\mu$ に関する $\psi_i \in G(\mathscr{H}_0)$ を境界条件とする有限ギブス測度 $P^\beta_{V,\psi_i}(\cdot)$ の $V \to \boldsymbol{Z}^d$ とするときの極限ギブス測度の集合

$$P^\beta_i(\cdot) = \lim_{V \to \boldsymbol{Z}^d} P^\beta_{V,\psi_i}(\cdot) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

がどのようになるかを調べよう．これらのうち，相異なるものはいくつあるのだろうか？　そして，それらは $\mathscr{G}_\beta$ の端点となるのだろうか？

この問題を考える前に，イジング・モデルの相転移存在証明をどのように行なったのかを，もう一度ふり返っておこう．イジング・モデルにおいては，スピン配置 σ をコントゥアーの組 $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\}$ で表し，その確率分布を

$$P^\beta_{V,+}(\sigma) = \frac{1}{Z_{V,+}} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} |\Gamma_i|\right)$$

で表した．また原点 O におけるスピンの状態が＋（－）となる確率

$$P^\beta_{V,+}(\omega(O) = +1) \qquad (P^\beta_{V,-}(\omega(O) = -1))$$

をコントゥアー相関関数に関するパイエルスの不等式を用いて，

$$P^\beta_{V,+}(\omega(O) = +1) \geq 1 - g(\beta) \qquad (g(\beta) \to 0 \ (\beta \to \infty \text{ のとき}))$$

のように評価した．$g(\beta)$ は V に依存しない関数なので，$V \to \boldsymbol{Z}^d$ とするとき極限ギブス測度 P^β_+ （P^β_-）は β が十分大きいとき

$$P^\beta_+(\omega(O) = +1) \geq 1 - g(\beta), \qquad P^\beta_-(\omega(O) = -1) \geq 1 - g(\beta)$$

という評価をみたした．これにより，β が十分大きいとき $P^\beta_+ \neq P^\beta_-$ ということがわかったのである．

同様のことを，いま我々が考えているモデルについてもできないものかと考えてみよう．まず，コントゥアーの概念を一般化しよう．V におけるスピン配置 φ に対して $\partial\varphi$ を前と同様に定める．これをいくつかの連結成分の和 $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ に分解し，各 Γ_i とその上のスピン配置の組 $\boldsymbol{\Gamma}_i = (\Gamma_i, \varphi(\Gamma_i))$ を一般化されたコントゥアーと呼ぼう．すると，イジング・モデルと同様にして，V に

おけるスピン配置はコントゥアーの組 $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\}$ で表され，$V \setminus \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ の各連結成分におけるスピン配置は $G(\mathscr{H}_0)$ のどれかに一致する．

このことを例1のモデルについて見てみよう．スピン配置 $\varphi \in \Omega_V$ と $t \in V$ に対して，t の隣接格子点 $\{t_1, \cdots, t_{2d}\}$ のスピン配置が $\varphi(t)$ と一致するとき，すなわち $\varphi(t) = \varphi(t_1) = \cdots = \varphi(t_{2d})$ となるとき t を φ に対する正規点と呼ぼう．次に，t および t の隣接点 $t_1, \cdots, t_{2d}$ のいずれかが正規点でないとき t を高エネルギー点と呼ぶと，高エネルギー点の全体が $\partial\varphi$ となる．この $\partial\varphi$ を連結成分に分解することによりコントゥアーの組が定められる．

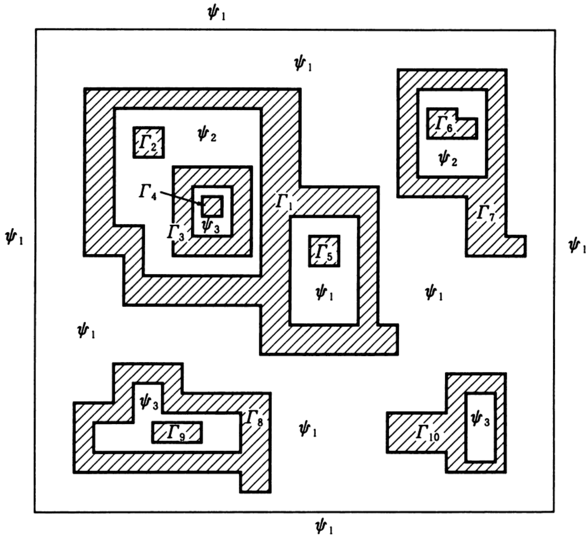


図6　コントゥアーのタイプ
$\Gamma_1, \Gamma_5, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_{10}$：タイプ1
$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_6$：タイプ2
Γ_4, Γ_9：タイプ3

図6から明らかのように，コントゥアーはその外側の状態に応じて，1，2，3のタイプに分かれる．ψ_i という境界条件の下で，$\varphi \in \Omega_V$ を考えいちばん外側のコントゥアーの全体を φ_{out} で表すと，$\Gamma \in \varphi_{\text{out}}$ はタイプ i のコントゥアーとな

る．

タイプ i のコントゥアー全体の集合を $\mathscr{C}_i$ で表し，$\Gamma\in\mathscr{C}_i$ に対して

$$\rho^{\beta}_{V,i}(\Gamma) = \sum_{\varphi\in\mathfrak{A}_V(\Gamma)} P^{\beta}_{V,\psi_i}(\varphi) \tag{3.1}$$

によって外側コントゥアー Γ の相関関数を定めよう．ここで，

$$\mathfrak{A}_V(\Gamma) = \{\varphi\in\Omega_V\,;\,\Gamma\in\varphi_{\text{out}}\}.$$

この相関関数に関して

$$\rho^{\beta}_{V,i}(\Gamma) \le e^{-c\beta|\Gamma|} \qquad (c>0,\ |\Gamma|:\Gamma\text{ の格子点の数}) \tag{3.2}$$

となる評価が得られれば，イジング・モデルのときと同様にして

$$P^{\beta}_{V,\psi_i}(\omega(t)=\psi_i(t)\ \ (t\in W)) \ge 1-g(\beta) \tag{3.3}$$

という評価が得られる．ここで，W は O を中心とする有限領域．

もし例1のモデルにおいて $J_1=J_2=J_3$ ならば，イジング・モデルにおいて行なったパイエルスの議論を拡張することによってコントゥアー Γ を消す変換 $f:\mathfrak{A}_V(\Gamma)\to\Omega_V$ を定義し，

$$H_V(f\varphi) = H_V(\varphi) - H(\varphi_\Gamma|\psi_i)$$

をみたすようにできる．ここで，φ_Γ は $\Gamma\in\mathscr{C}_i$ を唯一のコントゥアーとしてもつスピン配置であり，パイエルスの条件より

$$H(\varphi_\Gamma|\psi_i) \ge \rho|\Gamma|$$

となっている．したがって，前と同様の方法で

$$\rho^{\beta}_{V,i}(\Gamma) \le e^{-\beta\rho|\Gamma|}$$

という評価が得られる．

以上述べたように，相互作用に $J_1=J_2=J_3$ という対称性がある場合には，イジング・モデルと同様にしてパイエルスの議論が適用できるのであるが，対称性がない場合には問題はそう簡単ではない．

この問題を克服するために考え出されたのが，コントゥアー・モデルという概念である．境界条件 ψ_i の下でスピン配置 $\varphi\in\Omega_V$ をコントゥアーの組で表すと，外側コントゥアーはすべてタイプ i のコントゥアーとなるが，それ以外のものはいろいろなタイプのコントゥアーとなる．このことが問題を複雑にしてい

るのである．そこで，ある一つのタイプのコントゥアーしか現れないコントゥアーの組 $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\} \subset \mathscr{C}_i$ を考える．もちろん，これに対応するスピン配置が存在するかどうかはわからない．スピン配置の全体を考えるかわりに，V に含まれる一つのタイプたとえばタイプ i のコントゥアーの組の全体

$$\mathfrak{D}_V^i = \{\partial = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) : 各 \Gamma_k \subset V, \Gamma_k \in \mathscr{C}_i\}$$

を考え，この上に確率分布

$$\widetilde{P}_{V,i}^F(\partial) = \frac{1}{Z_{V,i}} \exp\left\{-\sum_{\Gamma \in \partial} F(\Gamma)\right\}$$

で定義する．ここで，$F(\cdot)$ は $\mathscr{C}_i$ 上の関数で

$$F(\Gamma) \geq \tau|\Gamma|$$

をみたすものである．このようなモデルを**コントゥアー・モデル**と呼ぶ．コントゥアー・モデルは，現実のスピン配置から定まるモデルではなく仮想の世界のモデルである．

コントゥアー・モデルにおいても，外側コントゥアーの相関関数が定義されるが，このモデルにおいては出てくるコントゥアーはただ一つのタイプだけであるからパイエルスの議論が適用され，

$$\widetilde{\rho}_{V,i}^F(\Gamma) \leq \exp\{-\tau|\Gamma|\} \tag{3.4}$$

という評価が得られる．

また，このコントゥアー・モデルに関しては

$$|\widetilde{\rho}_{V,i}^F(\Gamma_1, \Gamma_2) - \widetilde{\rho}_{V,i}^F(\Gamma_1)\widetilde{\rho}_{V,i}^F(\Gamma_2)| \leq \exp\{-c_1\tau(|\Gamma_1| + |\Gamma_2| + d(\Gamma_1, \Gamma_2)\} \tag{3.5}$$

という評価が成り立つ．ここで，$c_1 > 0$ で $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ は Γ_1 と Γ_2 との距離である．

◆ Pirogov - Sinai の定理◆

Pirogov - Sinai の定理とは，一言でいえば現実のモデルと仮想のコントゥアー・モデルとの間の対応を与えるものといえるが，これをこれから述べていこう．

相互作用 $\mathscr{H}_\mu$ はパラメーター $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{r-1})$ で表されているが，このパラ

メーターの空間を

$$\mathcal{U}(\varepsilon_0) = \{\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{r-1})\ ;\ |\mu| < \varepsilon_0\}$$

とおくと，Pirogov-Sinai の定理は β が十分大きいときこの $\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ が次のように分解されていることを主張する．

定理 3.1（Pirogov-Sinai [5, 6]）

相互作用に関して条件（A-1）～（A-4）が成り立ち，さらに β が十分大きいと仮定する．まず，$\mu_0(\beta)$ という点が $\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ に存在し，$\mu = \mu_0(\beta)$ のとき相互作用 $\mathscr{H}_\mu$ から定まるギブス測度 $P^{\beta}_{V,\psi_i}(\cdot)$（$i = 1, \cdots, r$）に対して，各 $\mathscr{C}_i$ 上で定義された関数の列（$F_1, \cdots, F_r$）が存在して

$$(1)\quad F_i(\Gamma) \geq \tau|\Gamma|,\quad \tau = \frac{1}{2}\rho\beta - 1 \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

$$(2)\quad \widetilde{\rho}^{F}_{V,i}(\cdot) = \rho^{\beta}_{V,i}(\cdot) \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

が成り立つ．すなわち，現実のモデルの外側コントゥアーの相関関数がコントゥアー・モデルの相関関数で表現されたのである．したがって，(3.4) の評価を用いて (3.3) の評価が $i = 1, \cdots, r$ について得られる．

この評価から r 個の極限ギブス測度

$$P^{\beta}_i(\cdot) = \lim_{V \to Z^d} P^{\beta}_{V,\psi_i}(\cdot) \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

は相異なる $\mathscr{G}_\beta$ の点であることがわかる．

また，(3.5) よりこれらの極限ギブス測度は $\mathscr{G}_\beta$ の端点となることもわかる．

次に，$\mu_0(\beta)$ から出発する r 本の曲線 $\delta_1(\beta), \cdots, \delta_r(\beta)$ が $\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ 内に存在し，各 $\delta_j(\beta)$（$j = 1, \cdots, r$）に対して $\mu \in \delta_j(\beta)$ のとき $r-1$ 個の関数の列（$F_1, \cdots, F_{j-1}, F_{j+1}, \cdots, F_r$）が存在して $i \in \{1, \cdots, r\} \setminus \{j\}$ に関して上に述べた (1)，(2) が成り立つ．すなわち，$r-1$ 個の極限ギブス測度

$$P^{\beta}_i(\cdot) = \lim_{V \to Z^d} P^{\beta}_{V,\psi_i}(\cdot) \qquad (i \in \{1, \cdots, r\} \setminus \{j\})$$

は相異なる $\mathscr{G}_\beta$ の端点となることがわかる．

さらに，$\delta_j(\beta)$ と $\delta_k(\beta)$ を境界とする2次元領域 $\delta_{j,k}(\beta)$（$1 \leq j \neq k \leq r$）が

$\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ 内に存在し，$\mu \in \delta_{j,k}(\beta)$ のとき $r-2$ 個の関数の列 $(F_1, \cdots, F_{j-1}, F_{j+1}, \cdots, F_{k-1}, F_{k+1}, \cdots, F_r)$ が存在し，上の (1)，(2) が成り立つ．このときには，$r-2$ 個の極限ギブス測度

$$P_i^\beta(\cdot) = \lim_{V \to Z^d} P_{V,\psi_i}^\beta(\cdot) \qquad (i \in \{1, \cdots, r\} \setminus \{j, k\})$$

が相異なる $\mathcal{G}_\beta$ の端点となることがわかる．

一般には，$\delta_B(\beta)$ $(B = \{i_1, \cdots, i_k\})$ なる k 次元の曲面が $\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ 内に存在し，$\mu \in \delta_B(\beta)$ に関しては $r-k$ 個の極限ギブス測度

$$P_i^\beta(\cdot) = \lim_{V \to Z^d} P_{V,\psi_i}^\beta(\cdot) \qquad (i \in \{1, \cdots, r\} \setminus \{i_1, \cdots, i_k\})$$

が相異なる $\mathcal{G}_\beta$ の端点となる．また，このとき δ_B の境界は

$$\bigcup_{j \in B} \delta_{B \setminus \{j\}}$$

で与えられる．

(A-4) の条件において，O_r は

$$O, \quad \gamma_i \ (i=1,\cdots,r), \quad \gamma_{i,j} \ (1 \le i \ne j \le r), \quad \cdots, \quad \gamma_B \ (B \subset \{1,\cdots,r\}, \ \#B = k), \quad \cdots$$

のように分解されたが，上で述べたパラメーターの空間 $\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ の分解も位相的には同じ構造をしている．例 1 のモデルについては図 7 を参照．

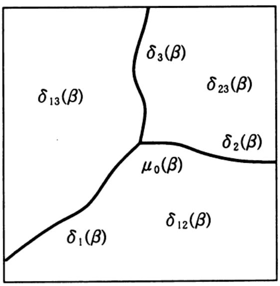


図 7　$\mathcal{U}(\varepsilon_0)$ の分解

ここで，次のことに注意しておこう．$\mathcal{G}_\beta$ の端点は上のようにして得られた ψ_i を境界条件にもつ極限ギブス測度だけでつきるのであろうか？ Pirogov-Sinai の定理が発表されてから後に，Zahradnik [18] によりシフト不変な $\mathcal{G}_\beta$ の端点は上に述べた極限ギブス測度だけに限られるということが示された．

その後，Pirogov-Sinai の定理の場の理論への拡張については Imbrie [19] によってなされ，また格子モデルから連続モデルへの拡張は Bricmont-Kuroda-Lebowitz [20, 21] によりなされている．

紙面の関係で述べることができなかったが，近年 Large deviation との関連において興味ある結果がいくつか得られている．Dobrushin-Kotecky-Shlosman [14, 15] により，2次元イジング・モデルの相分離の問題が扱われており，+ の海に浮かんだ − スピンのかたまりの形状について，ある種の変分原理が成り立つことが示されている．また，Large deviation と格子モデルとの関連については Ellis [16]，Schonmann [17] を参照されたい．

参考文献

[1] 宮本宗実，格子気体の相転移，Seminar on Probability, 1973.

[2] 樋口保成，2次元 Ising Model の Gibbs 分布，Seminar on Probability, 1982.

[3] Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*, Pergamon Press, 1982.

[4] D. Ruelle, *Statistical Mechanics. Rigorous Results.*, Benjamin, 1969.

[5] S. A. Pirogov, Ya. G. Sinai, Phase diagrams of classical lattice systems I., *Theor. Mat. Fiz.* **25** (1975), 358 − 369.

[6] S. A. Pirogov, Ya. G. Sinai, Phase diagrams of classical lattice systems II., *Theor. Mat. Fiz.* **26** (1976), 61 − 76.

[7] R. L. Dobrushin, Problem of uniqueness of a Gibbs random field and phase transitions., *Funkts. Anal. Prilozh.* **2** (1968), 44 − 57.

[8] R. L. Dobrushin, Gibbsian state which describes co-existence of phases for a three-dimensional Ising model., *Thor. Veroyatn. Primen.* **17** (1972), 612 − 639.

[9] R. L. Dobrushin, An investigation of Gibbsian states for three-dimensional lattice systems., *Thor. Veroyatn. Primen.* **18** (1973), 261 − 279.

[10] R. B. Israel, *Convexity in the theory of Lattice Gases.*, Princeton University Press, 1972.

[11] J. Bricmont, J. L. Lebowitz, C. E. Pfister, E. Olivieri, Non-Translation Invariant Gibbs States with Coexisting Phases, *Commun. Math. Phys.* **66** (1979), 1 – 20.

[12] Y. Higuchi, On the absence of non-translationally invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising system., Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Proc. of the Colloquium on Random Fields, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **27**, North-Holland, 517 – 534, 1982.

[13] M. Aizenman, Translation invariance and instability of phase coexistence in two dimensional Ising model., *Commun. Math. Phys.* **73** (1980), 83 – 94.

[14] R. L. Dobrushin, R. Kotecky, S. Shlosman, *Wulff construction: a global shape from local interaction.*, American Mathematical Society.

[15] C. E. Pfister, Large deviations and phase separation in the two-dimensional Ising model., *Helvetica Physica Acta.*

[16] R. S. Ellis, *Entropy, large deviations and statistical mechanics.*, Springer, 1985.

[17] R. H. Schonmann, Second order large deviation estimates for ferromagnetic systems in the phase coexistence region., *Commun. Math. Phys.* **112** (1987), 409 – 422.

[18] M. Zahradnik, An alternate version of Pirogov-Sinai theory., *Commun. Math. Phys.* **93** (1984), 559 – 581.

[19] J. Z. Imbrie, Phase diagrams and cluster expansions for low temperature $P(\phi)_2$ models I and II., *Commun. Math. Phys.* **82** (1981), 261 and 305.

[20] J. Bricmont, K. Kuroda, J. L. Lebowitz, The structure of Gibbs States and Phase Coexistence for Non-Symmetric Continuum Widom Rowlinson Models., *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.* **67** (1984), 121 – 138.

[21] J. Bricmont, K. Kuroda, J. L. Lebowitz, First Order Phase Transitions in Lattice and Continuous Systems : Extension of Pirogov-Sinai Theory., *Commun. Math. Phys.* **101** (1985), 501 – 538.

[22] 伊藤 清, 確率論, 岩波書店, 1991.

第5話

Path Integral 入門 *)

一瀬　孝

1° はじめに

経路積分 (path integral) とは何か．それは線積分 (curvilinear integral) のことではない．実数 $\boldsymbol{R}$ を時間パラメーターとする3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中の曲線であるところの経路 $X:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^3$ の汎関数 $F(X)$ の，経路の空間上の測度 $\mathcal{D}[X]$ に関する汎関数積分

$$\int_{\{X:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^3\}} F(X)\,\mathcal{D}[X]$$

のことである．しかも，これによって物理的に重要な量を表すことができるのである．

Feynman [9] は，Dirac [5] の注意に示唆されて経路積分 (path integral) のアイデアを発明し，量子力学のそれまで知られていたものとは別の定式化を与えた．質量 m の1粒子（たとえば電子）がポテンシャル $V(x)$ の下で運動しているとする．$K(t,x;0,y)$ を，時刻0に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至るという事象に対する確率振幅 (probability amplitude) とすると，Feynman はそれを物理的仮説から次のように書き下した：

$$K(t,x;0,y)=\int_{\{X:\,X(0)=y,\,X(t)=x\}} e^{(i/\hbar)S(X)}\,\mathcal{D}[X] \tag{1.1}$$

ここに $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ で，h はプランク定数である．$S(X)$ は，経路 $X:[0,t]\to\boldsymbol{R}^3$ に対する作用 (action) と呼ばれ，一般にラグランジュアンの時間積分であるが，いま考えている場合には

*）亡き母に捧ぐ．

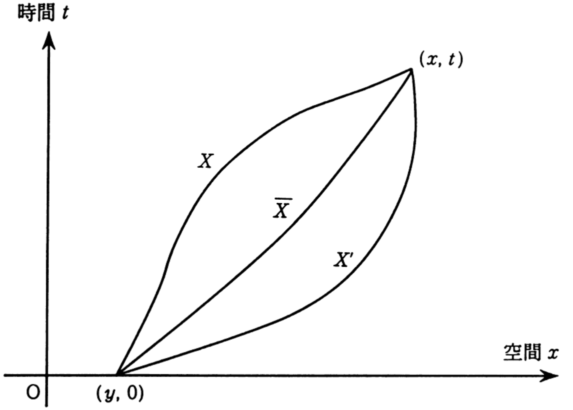


図1　$(y, 0)$ と (x, t) を結ぶ経路 X

$$S(X) = \int_0^t \left(\frac{m}{2}\dot{X}(s)^2 - V(X(s))\right)ds, \qquad \dot{X}(s) = \frac{d}{ds}X(s) \tag{1.2}$$

で与えられる．$\mathcal{D}[X]$ は，時刻 0 に空間の位置 y を出発し，時刻 t に空間の位置 x に至る経路 $X(\cdot)$ 全体の空間上の一様‘測度’で，形式的には，$dX(\tau)$ を τ ごとに $\boldsymbol{R}^3$ のルベーグ測度とすると，$\mathcal{D}[X] = \text{constant} \prod_{0\le\tau\le t} dX(\tau)$ と書ける．この (1.1) の右辺が **ファインマン経路積分** である．そして驚くべきことに，それは天下り的に与えられたように見えるにもかかわらず，シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right]\phi(t, x), \qquad t > 0,\ x \in \boldsymbol{R}^3 \tag{1.3}$$

の基本解になっていることを示すことができるのである．

(1.1) の導出を Feynman は次のように考えた ([9], [10])．まず確率振幅 $K(t, x; 0, y)$ は，粒子が $(y, 0)$ を出発して経路 $X(\cdot)$ を経て (x, t) に至るという，個々の経路 $X(\cdot)$ ごとの事象に対する確率振幅 $\phi[X]$ の和であるとする：

$$K(t, x; 0, y) = \sum_{X:X(0)=y,\ X(t)=x} \phi[X] \tag{1.4}$$

つぎに，各経路 $X(\cdot)$ からの寄与 $\phi[X]$ は

$$\phi[X] = C \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(X)\right] \tag{1.5}$$

とする．ただし，C は経路 $X(\cdot)$ に無関係な定数である．量子力学では，各経路 $X(\cdot)$ は，平等に同じ大きさ（絶対値）で全確率振幅 $K(t, x; 0, y)$ に寄与するという民主主義の原理に従い，経路ごとの個性は，その位相（偏角）の違いで表されているといえる．このようなすべての経路 $X(\cdot)$ についての和を，経路の空間上の一様‘測度’$\mathcal{D}[X]$ があったとして，$\mathcal{D}[X]$ に関する‘積分’として少しもっともらしく書き直したのが (1.1) である．この点で古典力学は，民主主義の原理に従っていない．粒子は，時空の 2 点 $(y, 0)$, (x, t) 間を作用 $S(X)$ を極小にする経路，すなわちいわゆる古典軌道 $\overline{X}(\cdot)$ に沿って運動するからである．

(1.5) に関して，Dirac は，$\phi[X]$ が $C \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(X)\right]$ に“対応している (correspond to)”とか“類似している (analogous to)”とか言ったのに対し，Feynman は (1.5) のように“等しい (equal to)”と言い切ったのである．

(1.1) は配位空間の経路 $X: [0, t] \to \boldsymbol{R}^3$ 全体上の‘積分’であるが，同じように考えて，位相空間の経路 $(X, P): [0, t] \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3$ 全体上の‘積分’として，**位相空間経路積分** (phase space path integral) または**ハミルトニアン経路積分** (Hamiltonian path integral) ([14], [27]) がある．それによってまた確率振幅 $K(t, x; 0, y)$ を書くと，ハミルトニアンが $(2m)^{-1}p^2 + V(x)$ であるから，

$$K(t, x; 0, y) = \iint_{\substack{\{(X, P): X(0) = y,\ X(t) = x, \\ P \text{ unrestricted}\}}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^t [\dot{X}(s) P(s) - ((2m)^{-1} P(s)^2 + V(X(s)))]\, ds\right) \mathcal{D}[X]\, \mathcal{D}[P] \tag{1.6}$$

となる．$\mathcal{D}[X]\,\mathcal{D}[P]$ は，$X(\cdot)$ は $X(0) = y$, $X(t) = x$ をみたすが，$P(\cdot)$ にはなんの制限もつけない位相空間経路 (X, P) 全体の空間上の一様‘測度’で，形式的には，$dX(\tau)dP(\tau)$ を τ ごとに $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R}^6$ のルベーグ測度とすると，$\mathcal{D}[X]\,\mathcal{D}[P] = \prod_{0 \le \tau \le t} (2\pi\hbar)^{-3} dX(\tau)\, dP(\tau)$ と書ける．(1.6) は形式的に $\mathcal{D}[P]$ で積分

してしまえば (1.1) になるが，(1.6) は (1.1) より一般のハミルトニアンに対して有効である．

数学的には，(1.1)，(1.6) の‘積分’，または‘測度’ $\mathcal{D}[X]$，$\mathcal{D}[X]\mathcal{D}[P]$ の意味が曖昧で，事実このような一様測度は存在しない．しかし，この表示 (1.1)，(1.6) の被‘積分’関数が古典力学の変数で書けており，この‘積分’において停留位相の方法が使えるとすれば，$\hbar \to 0$ とすることにより，古典力学から量子力学への移行をすぐに見ることができる．また，形式的な議論によってではあるが，他のいろいろなことを直接説明する威力をもっているので，量子力学から場の量子論，統計力学，ゲージ場の量子論，そして弦の量子論までの広い範囲でそれらの定式化に用いられている．

いろいろな観点からの工夫をこらしたアプローチがある．この稿では，次の項目について解説したい．

(1)　有限次元積分による近似（[28]，[12]，[22]，[33]，[3]）☞ 2° 節

(2)　虚数時間または虚数質量経路積分（[28]，[23]，[31]）☞ 3° 節

(3)　ディラック方程式に対する経路積分（[19]，[20]，[2]，[15]，[34]）☞ 4° 節

(4)　運動量表示のシュレディンガー方程式（[25]，[26]，[1]）☞ 5° 節

(5)　場の量子論（[7]，[17]）☞ 6° 節

(1)，(2) では，主に Nelson [28] に従って，最も簡単な Trotter 積公式による意味づけと Feynman-Kac 公式について述べる．(2)，(3)，(4) は，数学的な可算加法的測度を実際に構成できる場合である．(5) も，数学的には，無限次元空間における測度を構成する問題といえる．測度の構成はなされないが，他に，コヒーレント状態経路積分 [4]，ホワイトノイズを用いたアプローチ [32] やグラスマン (Grassmann) 数経路積分 [8] がある．経路積分に関するその他の文献は，[1]，[12]，[16]，[19] の文献を参照されたい．[24] はそれらにないレビューである．

次節より，光速度 c と $\hbar$ を 1 とおいてある．

2° 有限次元積分による近似

経路の空間上の測度を構成することはわきに置いておいて，経路積分 (1.1) を無限積として意味づけようという考え方である．(1.1) の右辺の‘積分’を，時間区間 $[0, t]$ を $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ と分割し，$X(\cdot)$ を $X(t_j)=x_j,\ j=1,\cdots,n,$ $(X(0)=x_0=y,\ X(t)=x_n=x)$，を頂点とする折れ線で近似して得られる有限次元積分

$$K_n(t, x; 0, y) = \left(\frac{2\pi i t}{nm}\right)^{-3n/2} \overbrace{\int_{R^3}\cdots\int_{R^3}}^{n-1} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\right)^2 - V(x_{j-1})\right](t_j-t_{j-1})\right) dx_{n-1}\cdots dx_1 \qquad (2.1)$$

の $n\to\infty$ の極限であると解釈する．実際，Feynman [10] は，この極限が (1.3)

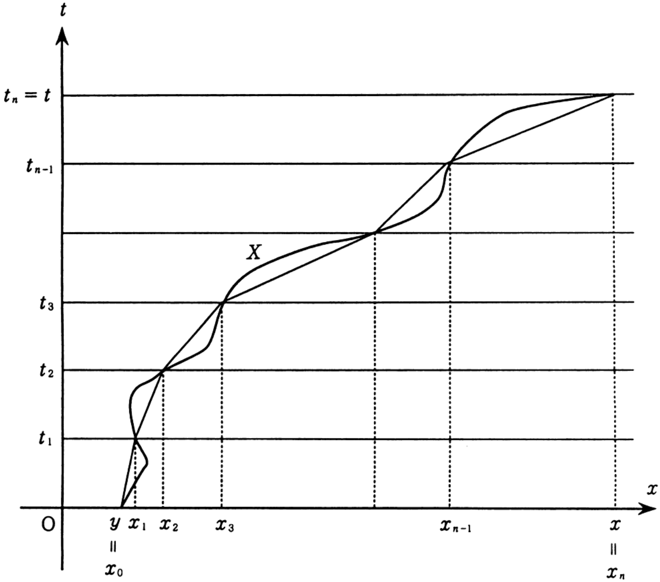


図2　経路 X を近似する折れ線経路

の基本解になることを示している．その方法は，$[0,t]$ を n 等分，すなわち $t_j - t_{j-1} = \dfrac{t}{n}$ $(1 \leq j \leq n)$ として，次の Trotter 積公式 (a) を用いて正当化できる (Nelson [28])．(b) は次節で用いる．

Trotter 積公式

(a) A, B をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，$A+B$ の閉包 C も自己共役であるとする．このとき，$f \in \mathscr{H}$ に対して

$$\left(\exp\left[-i\frac{t}{n}A\right]\exp\left[-i\frac{t}{n}B\right]\right)^n f \to \exp[-itC]f, \qquad n \to \infty. \qquad (2.2)$$

(b) A, B が (a) に加えてさらに，下に有界であるとすると，$f \in \mathscr{H}$ に対して

$$\left(\exp\left[-\frac{t}{n}A\right]\exp\left[-\frac{t}{n}B\right]\right)^n f \to \exp[-tC]f, \qquad n \to \infty. \qquad (2.3)$$

実際，g を $L^2(R^3)$ の関数として，$\int K_n(t, x; 0, y) g(y) dy$ を累次積分

$$\left(\frac{2\pi i t}{nm}\right)^{-3n/2} \int dx_{n-1} \int dx_{n-2} \cdots \int dx_0 \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{it}{n}\left[\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 - V(x_{j-1})\right]\right) g(x_0)$$

と解釈すると $\left(\int dx_j = L^2 - \lim_{R\to\infty} \int_{|x_j| \leq R} dx_j\right)$，これは

$$\left(\exp\left[-i\frac{t}{n}(-(2m)^{-1}\Delta)\right]\exp\left[-i\frac{t}{n}V\right]\right)^n g$$

に等しく，したがって $n \to \infty$ とすれば，(2.2) によって，$\exp[-it(-(2m)^{-1}\Delta + V)]g = \phi(t, \cdot)$ に $L^2(R^3)$ で強収束する．

藤原 [12] は，$V(x)$ の2階以上の微分が有界な関数のとき，$X(s)$ を上のような折れ線で近似した $K_n(t, x; 0, y)$ の代わりに，区分的な古典軌道で近似したものが，$|t|$ が十分小さいとき，基本解 $K(t, x; 0, y)$ に x, y について一様収束することを示した．最近の Fujiwara [13] も参照．他の方法について，K. Itô [22], Truman [33], Cameron - Storvick [3] を見よ．

3° 虚数時間または虚数質量経路積分

虚数時間へ移行 $t \to -it$（ユークリッド化という），または虚数質量へ移行 $m \to im$ すると，シュレディンガー方程式 (1.3) は，$V(x)$ に $i=\sqrt{-1}$ がつくかどうかの違いはあるが，熱方程式に変わる．その違いは以下の議論にあまり関係ないので，前者の場合，すなわち虚数時間のほうで考える．そのとき (1.3) は，

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \left[\frac{1}{2m}\Delta - V(x)\right]u(t,x), \qquad t>0,\ x\in \boldsymbol{R}^3 \tag{3.1}$$

に変わる．ただし，$\phi(-it,x)$ を $u(t,x)$ と書き改めた．(3.1) の基本解を再び $K(t,x;0,y)$ と書くと，(1.1) もユークリッド化により

$$K(t,x;0,y) = \int_{\{X:X(0)=y,\ X(t)=x\}} \exp\left(-\int_0^t\left[\frac{m}{2}\dot{X}(s)^2+V(X(s))\right]ds\right)\mathfrak{D}[X] \tag{3.2}$$

に変わる．ここで，右辺の指数関数の肩がハミルトニアンの時間積分に変わったことに注意しよう．ただし，$X(-is)$ を $X(s)$ と再び書いた．

(3.2) において，もし連続ではあるが微分不可能な経路 $X(\cdot)$ たちを主に考えなければならないとすれば，$\exp\left[-\int_0^t \frac{m}{2}\dot{X}(s)^2ds\right]=0$ と考えられるので，

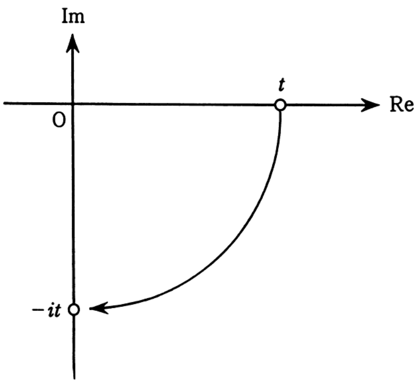


図3　ユークリッド化

$\mathcal{D}[X] = \text{constant} \prod_{0\le\tau\le t} dX(\tau)$ の無限大と合わせて，なにか有限なものが得られそうだ．実際そのとおりであって，こうして得られたのがウィーナー測度で，このことを条件付きウィーナー測度 $\mu_{t,x;0,y}$ によって書くと

$$K(t,x;0,y) = \int_{\{X:X(0)=y,\,X(t)=x\}} \exp\left(-\int_0^t V(X(s))\,ds\right) d\mu_{t,x;0,y}(X)\,k_0(t,x-y) \quad (3.3)$$

となる．ただし，$k_0(t,x)$ は，(3.1) において $V(x)\equiv 0$ のときの基本解

$$k_0(t,x) = \left(\frac{2\pi t}{m}\right)^{-3/2} e^{-mx^2/2t} \quad (3.4)$$

である．ウィーナー測度の台は，ブラウン運動という，$0<\alpha<\frac{1}{2}$ として，α-ヘルダー連続な経路 $X(\cdot)$ たちの上に集中していることが示され，したがって経路 $X(s)$ は微分可能ではない．以上をまとめると，(3.1) の解は次のように経路積分表示できる．初期値を $u(0,x)=g(x)$ とする．

定理 3.1　(a)　連続経路 $X:[0,t]\to \boldsymbol{R}^3$ の空間 $C([0,t]\to\boldsymbol{R}^3)$ 上の確率測度 $\mu_{t,x}$ が存在して，

$$u(t,x) = \int_{C([0,t]\to\boldsymbol{R}^3),\,X(t)=x} \exp\left(-\int_0^t V(X(s))\,ds\right) g(X(0))\,d\mu_{t,x}(X) \quad (3.5)$$

が成立する．

(b)　連続経路 $X:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3$ の空間 $C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3)$ 上の確率測度 $\mu_{0,x}$ が存在して，

$$u(t,x) = \int_{C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3),\,X(0)=x} \exp\left(-\int_0^t V(X(s))\,ds\right) g(X(t))\,d\mu_{0,x}(X) \quad (3.6)$$

が成立する．

(b) の (3.6) を **Feynman - Kac** 公式と呼ぶ．(3.1) において，シュレディンガー作用素 $-(2m)^{-1}\Delta + V(x)$ の代わりに電磁場のあるシュレディンガー作用素 $(2m)^{-1}(-i\nabla - A(x))^2 + V(x)$ のときの表示は Feynman - Kac - Itô 公式と呼ばれる (Simon［31］参照)．

定理3.1を示すには，ふつうマルコフ過程に基づいた確率論的な証明が与えら

れるが，ここでは，あまり予備知識のいらない，Riesz の表現定理を用いるものを Nelson [28] に従って与えよう．(b) のみの証明の概略を述べる．(a) の証明も同様にできる．まず，ウィーナー測度 $\mu_{0,x}$ を構成する．$\boldsymbol{R}^3$ の1点コンパクト化 $\dot{\boldsymbol{R}}^3 = \boldsymbol{R}^3 \cup \{\infty\}$ の連続無限直積 $\Omega = (\dot{\boldsymbol{R}}^3)^{[0,\infty)} = \prod_{s\in[0,\infty)} \dot{\boldsymbol{R}}^3$ を考える．Ω は，すべての経路 $X: [0,\infty) \to \dot{\boldsymbol{R}}^3$ からなる非常に大きな空間であり，不連続経路や無限遠点 ∞ を通る経路も含む．Ω は，Tychonoff の定理（[29] を見よ）より，積位相でコンパクト・ハウスドルフ空間になる．$C(\Omega)$ を Ω 上の連続関数全体のなすバナッハ空間とする．$C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ を $C(\Omega)$ の元 Φ であって，時刻の有限列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ と $(\dot{\boldsymbol{R}}^3)^{n+1}$ 上のある連続関数 $F(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ が存在して，$\Phi(X) = F(X(t_0), X(t_1), \cdots, X(t_n))$ と表現できるものからなる部分空間とする．

$x_0 = x$ として，$C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ 上の線形汎関数 L_x を (3.4) の $k_0(t, x)$ を用いて

$$L_x(\Phi) = \overbrace{\int_{\boldsymbol{R}^3}\cdots\int_{\boldsymbol{R}^3}}^{n} k_0(t_1 - t_0, x_0 - x_1)\cdots k_0(t_n - t_{n-1}, x_{n-1} - x_n) \times F(x_0, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \qquad (3.7)$$

によって定義する．このとき，次の補題を容易に証明することができる．

補題 3.2　(i)　L_x は，$\Phi \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ に対応する F の選び方によらない．

(ii)　次の不等式が成立する：

$$|L_x(\Phi)| \le \|\Phi\|, \qquad \Phi \in C_{\mathrm{fin}}(\Omega). \qquad (3.8)$$

この補題の帰結は次のとおりである．まず Stone-Weierstrass の定理（[29] を見よ）より，$C_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ は $C(\Omega)$ で稠密だから，(3.8) はすべての $\Phi \in C(\Omega)$ で成立する．しかも，$\Phi \ge 0$ ならば $L_x(\Phi) \ge 0$ をみたすので，L_x は $C(\Omega)$ 上の正値連続線形汎関数になる．Riesz の表現定理（[29] を見よ）により，Ω 上の正則な正値ボレル測度 $\mu_{0,x}$ が存在して

$$L_x(\Phi) = \int_\Omega \Phi(X)\, d\mu_{0,x}(X), \qquad \Phi \in C(\Omega) \qquad (3.9)$$

が成立する．明らかに $\mu_{0,x}(\Omega) = L_x(1) = 1$ である．

つぎに，$\mu_{0,x}$ の台を見よう．Ω は大きすぎる．$\mu_{0,x}$ の台は実質的に，連続経路の空間 $C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3)$，さらに詳しくは，$\alpha$-ヘルダー連続経路の空間 $C^\alpha([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3)$ $(0<\alpha<1/2)$ 上に集中していることを示すことができる．初等的には，これらの経路の空間が

$$C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{\substack{0\le t,s\le k\\ |t-s|\le 1/l}}\{X\in\Omega;|X(t)-X(s)|\le 1/n\} \tag{3.10}$$

$$C^\alpha([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^3) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{0\le t,s\le k}\{X\in\Omega;|X(t)-X(s)|\le n|t-s|^\alpha\} \tag{3.11}$$

と表せることから，Ω のボレル集合であることを知り，$\mu_{0,x}$ に対する測度が 1 であることをいう．

最後に $V(x)$ をよい関数，たとえばコンパクトな台をもつ連続関数のときに，Feynman-Kac 公式 (3.6) の確立の仕方はおおよそ次のとおりである．$L^2(\boldsymbol{R}^3)$ で有界線形作用素 $T(s)$ を

$$(T(s)g)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^3} k_0(s,x-y)\,e^{-sV(y)}g(y)\,dy, \qquad s>0 \tag{3.12}$$

で定義し，

$$\left(T\left(\frac{t}{n}\right)^n g\right)(x) = \overbrace{\int_{\boldsymbol{R}^3}\cdots\int_{\boldsymbol{R}^3}}^{n}\prod_{j=1}^{n}k_0\left(\frac{t}{n},x_{j-1}-x_j\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}V(x_k)\frac{t}{n}\right) \times g(x_n)\,dx_1\cdots dx_n, \qquad x_0=x \tag{3.13}$$

を考える．左辺は，$\left(\exp\left[-\frac{t}{n}(-2m)^{-1}\Delta\right]\exp\left[-\frac{t}{n}V\right]\right)^n g$ に等しく，Trotter の積公式 (2.3) から，$n\to\infty$ のとき $\exp[-t(-(2m)^{-1}\Delta+V)]g=u(t,\cdot)$，すなわち (3.6) の左辺に収束する．また，右辺は

$$\int\exp\left[-\sum_{j=1}^{n}V(X(t_j))\frac{t}{n}\right]g(X(t))\,d\mu_{0,x}(X) \tag{3.14}$$

に等しく，(3.14) は，Lebesgue の定理により，(3.6) の右辺に収束する．

結局，虚数時間（または虚数質量）量子力学では，経路積分が連続経路の空間上の可算加法的測度による積分として数学的に実現されたといえるかもしれ

ない．ただここでもう一度注意しておきたいのは，$\mathcal{D}[X]$ が意味づけられたという意味ではなく，ウィーナー測度は，虚数時間に移した $e^{is(X)}$ の中の運動エネルギー部分と $\mathcal{D}[X]$ との積

$$\exp\left[-\int_0^t \frac{m}{2}\dot{X}(s)^2 ds\right]\mathcal{D}[X] \tag{3.15}$$

から構成されていることである．

経路積分を虚数時間，またはユークリッド時空で考えることは，もともと，いったん取り扱いやすい虚数時間へいって計算を行ない，複素平面をまわって実数時間に戻ることによって，もとの実数時間での答えを得るための単なる数学的処方であったのであるが，S. W. Hawking [18] の宇宙創世モデルの話には，まともに虚数時間，ユークリッド時空での経路積分が出てくるのに驚かされるのである．

4°　ディラック方程式に対する経路積分

時空２次元ディラック方程式に対し，実際に連続経路の空間上の可算加法的測度を構成し基本解の経路積分表示を与えることができる（[19], [20]）．残念ながら，その方法は，時空４次元に対しては，時空２次元に帰着できるような特別の場合だけにしか適用できない．

次の２次元ディラック方程式を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = -\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x} - iA(t,x)\right) + im\beta + iV(t,x)\right]\varphi(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}. \tag{4.1}$$

α, β は，2×2 エルミート行列で，$\alpha^2+\beta^2=I$，$\alpha\beta+\beta\alpha=0$ をみたす．簡単のために，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

とする．$A(t, x)$, $V(t, x)$ は，実数値連続関数で，簡単のために連続的微分可能であるとしておく．

(4.1) の基本解 $K(t, x; 0, y)$ (2×2 行列) を位相空間経路積分で書いて

$$K(t, x; 0, y) = \iint_{\substack{\{(X, P) : X(0) = y,\ X(t) = x, \\ P \text{ unrestricted}\}}} \mathrm{Texp}\left(i\int_0^t [\dot{X}(s) P(s) - (\alpha(P(s) - A(s, X(s))) + m\beta + V(s, X(s)))]\, ds\right) \mathcal{D}[X]\, \mathcal{D}[P] \quad (4.3)$$

となるのではないかと予想してみる．T は時間順序記号，Texp は時間順序指数関数である．この (4.3) の右辺の‘積分’において，変数変換 $P(s) - A(s, X(s)) = P'(s)$, $X(s) = X'(s)$ を行なう．この変数変換の形式的ヤコビアンは 1 である．$P'(s)$, $X'(s)$ を再び $P(s)$, $X(s)$ と書くと，(4.3) の右辺は

$$\iint_{\substack{\{(X, P) : X(0) = y,\ X(t) = x, \\ P \text{ unrestricted}\}}} \mathrm{Texp}\left(i\int_0^t [\dot{X}(s)(P(s) + A(s, X(s))) - (\alpha P(s) + m\beta + V(s, X(s)))]\, ds\right) \mathcal{D}[X]\, \mathcal{D}[P] \quad (4.4)$$

となる．実際に，時空 2 次元の場合には，(4.4) の

$$\mathrm{Texp}\left(i\int_0^t [\dot{X}(s) P(s) - (\alpha P(s) + m\beta)]\, ds\right) \mathcal{D}[X]\, \mathcal{D}[P] \quad (4.5)$$

の部分から，1 次元連続経路の空間 $C([0, t] \to \boldsymbol{R})$ 上の可算加法的測度を構成することができて，(4.1) の基本解 $K(t, x; 0, y)$ に対して次のような経路積分表示ができる．

定理 4.1　$f, g \in \mathscr{S}(R, \boldsymbol{C}^2) = \mathscr{S}(\boldsymbol{R}) \otimes \boldsymbol{C}^2$ に対し，$C([0, t] \to \boldsymbol{R})$ 上の複素数値可算加法的測度 $\nu_{t, f; 0, g}$ が存在して

$$\begin{aligned}&\iint_{\boldsymbol{R}^2} {}^t\overline{f(x)}\, K(t, x; 0, y)\, g(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{C([0, t] \to \boldsymbol{R})} \exp\left(i\int_0^t [A(s, X(s))\, dX(s) - V(s, X(s))\, ds]\right) d\nu_{t, f; 0, g}(X) \quad (4.6)\end{aligned}$$

が成立する．$\nu_{t, f; 0, g}$ の台は，リプシッツ連続な経路 $X : [0, t] \to \boldsymbol{R}$ であって，$X(0) \in \mathrm{supp}\, g$, $X(t) \in \mathrm{supp}\, f$ をみたし，区間 $[0, t]$ の有限分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots$

$< t_n = t$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&X(s) - X(t_{j-1}) \\
&= \pm[(t_1 - t_0) - (t_2 - t_1) + \cdots + (-1)^{j-2}(t_{j-1} - t_{j-2}) + (-1)^{j-1}(s - t_{j-1})], \\
&\qquad t_{j-1} \leq s \leq t_j,\ 1 \leq j \leq n \qquad (4.7) \\
&(m = 0 \text{ のときは, } X(s) = x \pm (t-s),\ 0 \leq s \leq t)
\end{aligned}
$$

をみたすもの全体上に集中している.

注意1　実は, $C([0,t] \to \boldsymbol{R})$ 上の, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ で定義された 2×2 複素行列値緩増加超関数 $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}; M_2(\boldsymbol{C}))$ 値可算加法的測度 $\nu_{t;0}$ が存在して, $\nu_{t,f;0,g}(\cdot) = (f, \nu_{t;0}(\cdot)g)$ が成立することもいえる. ただし, この右辺の内積 (f,g) は, f について反線形, g について線形であるとする.

注意2　定理4.1は, 測度 $\nu_{t,f;0,g}$ の台が (4.7) のようにジグザグする経路全体の上に集中していることを言っている. すなわち, 電子のようなディラック粒子は, 1次元空間 $\boldsymbol{R}$ では, 各有限時間区間において光速度 $c = 1$ で有限回行ったり来たりする. これは, ディラック粒子の **Zitterbewegung** (震え運動) (Schrödinger [30], 江沢 [6]) のことを思い起こさせる.

定理4.1の証明は定理3.1の証明と同じように進む. 概略を述べよう.

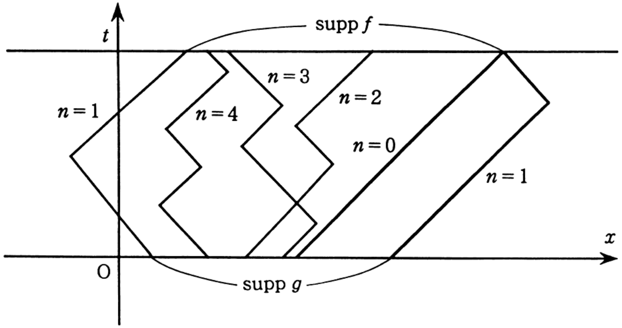


図4　光速度 $c = 1$ でジグザグする経路 X

まず $\nu_{t,f;0,g}$ の構成をする．$\boldsymbol{R}$ の1点コンパクト化 $\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ の連続無限直積 $\boldsymbol{X}_t=\dot{\boldsymbol{R}}^{[0,t]}=\prod_{s\in[0,t]}\dot{\boldsymbol{R}}$ を考える．前と同じように，$\boldsymbol{X}_t$ は，積位相でコンパクト・ハウスドルフ空間になる．$C(\boldsymbol{X}_t)$ を $\boldsymbol{X}_t$ 上の連続関数全体のなすバナッハ空間，$C_{\mathrm{fin}}(\boldsymbol{X}_t)$ を $C(\boldsymbol{X}_t)$ の元 Φ であって，時間区間 $[0,t]$ の有限分割 $0=s_0<s_1<\cdots<s_k=t$ と $(\dot{\boldsymbol{R}})^{k+1}$ 上のある連続関数 $F(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ が存在して，$\Phi(X)=F(X(s_0),X(s_1),\cdots,X(s_k))$ と表現できるものからなる部分空間とする．

$f,g\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}^2)$ を固定して，$C_{\mathrm{fin}}(\boldsymbol{X}_t)$ 上の線形汎関数 $L(\cdot\,;f,g)$：

$$L(\Phi;f,g)=\overbrace{\int_{\boldsymbol{R}}\cdots\int_{\boldsymbol{R}}}^{n+1}{}^t\overline{f(x_k)}\,k_0(s_k-s_{k-1},x_k-x_{k-1})\cdots k_0(s_1-s_0,x_1-x_0)$$
$$\times F(x_0,\cdots,x_k)g(x_0)\,dx_0\cdots dx_k \tag{4.8}$$

を考える．この $k_0(t,x)$ は（4.1）において電磁場のないとき（$A(t,x)=V(t,x)\equiv 0$）のディラック方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)=\left[-\alpha\frac{\partial}{\partial x}-im\beta\right]\varphi(t,x),\qquad t>0,\ x\in\boldsymbol{R} \tag{4.9}$$

の基本解

$$k_0(t,x)=2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}-im\beta\right)[J_0(m\sqrt{t^2-x^2})\theta(t-|x|)] \tag{4.10}$$

である．ただし，$J_0(t)$ はベッセル関数，$\theta(t)$ はヘビサイド関数である．

(4.9) の初期値問題の解は，初期値を $\varphi(0,x)=g(x)$ とし，

$$C=A+B=-\alpha\frac{\partial}{\partial x}-im\beta \tag{4.11}$$

とおくと，$\varphi(t,\cdot)=e^{tC}g$ と書ける．以下で決定的な役割を果たすことは，

$$\|e^{tC}g\|_\infty\le e^{mt}\|g\|_\infty,\qquad \|e^{tA}g\|_\infty\le\|g\|_\infty \tag{4.12}$$

なる事実である．ここで L^∞ ノルムを $\|\cdot\|_\infty$ で表した．(4.12) の前者を，時空2次元ディラック方程式は L^∞ 適切であるといい，一般の4次元ディラック方程式ではもはや成立しないことである．(4.12) の後者は，$g(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ g_2(x)\end{pmatrix}$ とすると

$$(e^{tA}g)(x) = \int_R \begin{pmatrix} \delta(x-y-t) & 0 \\ 0 & \delta(x-y+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \end{pmatrix} dy = \begin{pmatrix} g_1(x-t) \\ g_2(x+t) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

から明らかである．前者は，e^{tC} のみたす積分方程式

$$e^{tC} = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} B e^{sC} ds \tag{4.14}$$

から，B の L^∞ 作用素ノルムが m であることと（4.12）の後者を用いて得られる．（4.14）を反復して，ダイソン（Dyson）展開

$$\begin{aligned} e^{tC} &= e^{tA} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_1} e^{(t-t_n)A} B e^{(t_n-t_{n-1})A} \cdots B e^{t_1 A} \\ &= e^{tA} + \sum_{n=1}^{\infty} B^n \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_1} \exp\left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (t_{j+1}-t_j) A\right] \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

が得られる．ここで，固定した n に対して，$t_0 = 0$, $t_{n+1} = t$ と解することにする．（4.15）の2番目の等式では，$AB + BA = 0$ を用いた．

ところで，（4.8）は

$$L(\Phi; f, g) = (f(x_k), e^{\Delta s_k C} \cdots e^{\Delta s_1 C} F(x_0, \cdots, x_k) g(x_0)),$$
$$\Delta s_j = s_j - s_{j-1},\ 1 \leq j \leq k \tag{4.16}$$

と書ける．ただし，（4.16）の右辺の内積 (f, g) は，f について反線形，g について線形である．線形作用素 $e^{\Delta s_j C}$ は，（4.10）の積分核 $k_0(s_j - s_{j-1}, x_j - x_{j-1})$ をもち，x_{j-1} の関数を x_j の関数に移す．さらに，（4.16）に（4.15）の t を Δs_j におきかえたものを代入すると

$$\begin{aligned} L(\Phi; f, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} (f(x_k), C_{n_k}(\Delta s_k) \cdots C_{n_1}(\Delta s_1) F(x_0, \cdots, x_k) g(x_0)) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} L^n(\Phi; f, g) \end{aligned} \tag{4.17}$$

を得る．言うまでもなく，（4.16），（4.17）の右辺は，変数 $x_0, \cdots, x_k$ に関して

積分されている．(4.12) を用いて次の補題を証明することができる．

補題4.2 (i) (4.8) の $L(\cdot\,;f,g)$, (4.17) の $L^n(\cdot\,;f,g)$ は，$\Phi\in C_{\rm fin}(\boldsymbol{X}_t)$ に対応する F の選び方によらない．

(ii) 次の不等式が成立する：

$$|L(\Phi;f,g)| \le e^{mt}\|f\|_1\|g\|_\infty\|\Phi\| \tag{4.18}$$

$$|L^n(\Phi;f,g)| \le \frac{(m\,t)^n}{n!}\|f\|_1\|g\|_\infty\|\Phi\|, \qquad \Phi\in C_{\rm fin}(\boldsymbol{X}_t). \tag{4.19}$$

ここで $\|f\|_1$, $\|g\|_\infty$ は，f, g のそれぞれ L^1, L^∞ ノルムである．

この補題の帰結は次のとおりである．まず Stone - Weierstrass の定理より，$C_{\rm fin}(\boldsymbol{X}_t)$ は $C(\boldsymbol{X}_t)$ で稠密だから，(4.18)，(4.19) はすべての $\Phi\in C(\boldsymbol{X}_t)$ で成立する．したがって，$L(\cdot\,;f,g)$, $L^n(\cdot\,;f,g)$ は $C(\boldsymbol{X}_t)$ 上の連続線形汎関数になり，Riesz の表現定理により，$\boldsymbol{X}_t$ 上の正則な複素数値ボレル測度 $\nu_{t,f;0,g}$, $\nu^n_{t,f;0,g}$ が存在して

$$L(\Phi;f,g) = \int_{\boldsymbol{X}_t}\Phi(X)\,d\nu_{t,f;0,g}(X) \tag{4.20}$$

$$L^n(\Phi;f,g) = \int_{\boldsymbol{X}_t}\Phi(X)\,d\nu^n_{t,f;0,g}(X), \qquad \Phi\in C(\boldsymbol{X}_t) \tag{4.21}$$

が成立する．したがって，展開 (4.17) より

$$\nu_{t,f;0,g}(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n_{t,f;0,g}(\cdot) \tag{4.22}$$

を得る．(4.13) に注意すると，各 $\nu^n_{t,f;0,g}$ の台が $X(0)\in{\rm supp}\,g$, $X(t)\in{\rm supp}\,f$ をみたし，ちょうど n 回ジグザグする経路 $X(\cdot)$ の全体の集合に集中していることを示すことができ，(4.22) より，結局 $\nu_{t,f;0,g}$ の台がこれらの集合の和集合上に集中していること，すなわち $\nu_{t,f;0,g}$ が定理の主張する測度になっていることがわかる．

最後に経路積分表示 (4.6) を示すには，簡単のために $A(t,x)\equiv A(x)$, $V(t,x)\equiv V(x)$ が t によらないとすると，(3.6) の証明のときと同じように，今度は $L^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C}^2)$ で有界な線形作用素

$$(T(s)g)(x) = \int_R k_0(s, x-y)\, e^{i[A(y)(x-y)-V(y)s]} g(y)\, dy \tag{4.23}$$

を定義し，類似の議論を行なうことによって (4.6) を確立することができる．詳細は [20] を参照されたい．

注意3　Blanchard et al. [2], Gaveau et al. [13], Zastawniak [34] は，ポアソン過程を用いて確率論的に論じた．特に Blanchard et al. の結果を (4.6) と比較できるような形で書くと，(4.1) の解 $\varphi(t, x) = (\varphi(t, x, \sigma))_{\sigma=\pm1}$ は初期値を $g(x) = (g(x, \sigma))_{\sigma=\pm1}$ として次のように表示される：

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, \sigma) = e^{mt}\int i^{N(t)} \exp\Bigl(i\int_0^t [\sigma(s)A(s, X(s)) \\ - V(s, X(s))]ds\Bigr) g(X(0), \sigma(0))\, d\mu^m(N)\end{aligned} \tag{4.24}$$

ここに μ^m は，時刻0に $N(0)=0$ を出発するパラメーター m のポアソン過程 $N(t)$ に対する確率測度，すなわち $N(0)=0$ を出発する非減少右連続階段経路 $N: [0, \infty) \to \{0, 1, 2, \cdots\}$ の全体の空間上の確率測度であって，$\int_{\{N: N(t)=n\}} d\mu^m(N) = e^{-mt}\frac{(mt)^n}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をみたす．$X(s), \sigma(s)$ は

$$X(s) = x - \int_s^t \sigma(-1)^{N(t-\tau)} d\tau, \qquad \sigma(s) = \sigma(-1)^{N(t-s)}$$

である．

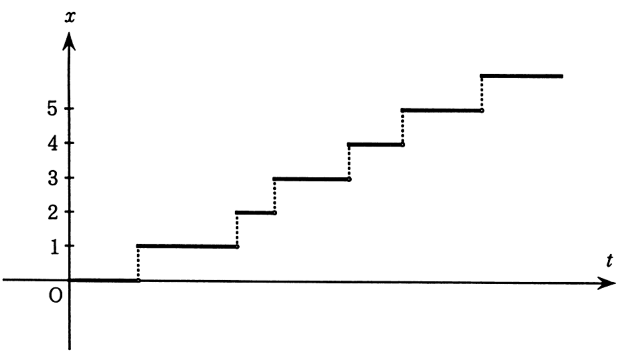


図5　階段経路 N

5° 運動量表示のシュレディンガー方程式

(1.3) をフーリエ変換した運動量表示のシュレディンガー方程式 ($\hbar=1$)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\phi}(t,p) = [(2m)^{-1}p^2 + V(-i\nabla_p)]\,\widehat{\phi}(t,p), \qquad t>0,\ p\in \boldsymbol{R}^3 \tag{5.1}$$

の解 $\widehat{\phi}(t,p) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3} e^{-ixp}\phi(t,x)\,dx$ に対する経路積分について，Maslov-Chebotarev [25] の結果を述べる ([26]，[1] 参照).

簡単のためにポテンシャル $V(x)$ は，そのフーリエ変換

$$\widehat{V}(p) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3} e^{-ixp}V(x)\,dx \tag{5.2}$$

が可積分であると仮定する．一般に，$\widetilde{V}(dp)$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の有界な複素数値測度として，$V(x) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3} e^{ixp}\,\widetilde{V}(dp)$ をみたすものならばよい．(5.1) の右辺の $V(-i\nabla_p)$ は，積分作用素

$$(V(-i\nabla_p)f)(p) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3}\widehat{V}(p-q)f(q)\,dq \tag{5.3}$$

である．(5.1) の基本解 $\widehat{K}(t,p;0,q)$ を位相空間経路積分で書くと

$$\widehat{K}(t,p;0,q) = \iint_{\substack{\{(P,X):P(0)=q,\ P(t)=p,\\ X\ \text{unrestricted}\}}} \exp\left(i\int_0^t [\dot{P}(s)X(s) - ((2m)^{-1}P(s)^2 + V(X(s)))]\,ds\right)\mathcal{D}[P]\,\mathcal{D}[X] \tag{5.4}$$

となるが，3° 節，4° 節とは違って，今度は，運動量経路 $P:[0,t]\to\boldsymbol{R}^3$ の空間上の可算加法的測度を，被‘積分’関数の，運動エネルギーを含む部分からではなく，ポテンシャルを含む部分と $\mathcal{D}[P]\,\mathcal{D}[X]$ との積

$$\exp\left(i\int_0^t [\dot{P}(s)X(s) - V(X(s))]\,ds\right)\mathcal{D}[P]\,\mathcal{D}[X] \tag{5.5}$$

から構成するのである．

$C([0,t]\to\boldsymbol{R}^3)^*$ を連続経路の空間 $C([0,t]\to\boldsymbol{R}^3)$ の双対空間とし，弱＊位相を入れる．それは，$[0,t]$ 上の $\boldsymbol{R}^3$ 値有界変動関数から定義される $\boldsymbol{R}^3$ 値測度全体の

空間である．(5.1) の解は次のように経路積分表示できる．初期値を $\widehat{\phi}(0, p) = \widehat{g}(p)$ とする．

定理 5.1　$C([0, t] \to \boldsymbol{R}^3)^*$ 上の複素数値可算加法的測度 λ が存在して，

$$\widehat{\phi}(t, p) = \int_{C([0, t] \to \boldsymbol{R}^3)^*,\, P(t) = p} \exp\left(-i\int_0^t (2m)^{-1} P(s)^2 ds\right) g(P(0))\, d\lambda(P) \tag{5.6}$$

が成立する．

Maslov‐Chebotarev [26] には，$(2\pi)^{-3/2}|\widehat{V}(p)|dp$（一般の場合は，$(2\pi)^{-3/2} \times \widetilde{V}(dp)$ の全変動測度）をレヴィ測度とするポアソン過程を用いた，(5.1) の解の別の経路積分表示が与えられている．

与えられた紙数も少なくなってきたので，証明などは文献を見られたい．

6° 場の量子論

これまでは，1次元時間をパラメーターとする経路の汎関数の'積分'を考えてきたが，場の量子論では，場と呼ばれる d 次元時空の点 $(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{d-1}$ をパラメーターとする N 次元空間 $\boldsymbol{R}^N$ 値関数 $\phi(t, \boldsymbol{x})$ の汎関数の'積分'が登場する．

たとえば，中性スカラー粒子の世界を記述する $\lambda\phi^4$ **スカラー場の量子論**では，$N = 1$ で，汎関数積分

$$Z(J) = N\int_{\{\phi: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{d-1} \to \boldsymbol{R}\}} e^{iS(\phi)} \mathcal{D}[\phi] \tag{6.1}$$

がラグランジュアンの時間積分である作用

$$S(\phi) = \int dt \int d\boldsymbol{x}\, [2^{-1}((\partial_t \phi(t, \boldsymbol{x}))^2 - |\nabla_{\boldsymbol{x}} \phi(t, \boldsymbol{x})|^2) - 2^{-1} m^2 \phi(t, \boldsymbol{x})^2 - \lambda\phi(t, \boldsymbol{x})^4 + J(t, \boldsymbol{x})\phi(t, \boldsymbol{x})] \tag{6.2}$$

に対して意味づけられればよい．ただし $S(\phi)$ には，外場 J の項が加えてある．(6.2) の右辺の被積分関数は，ラグランジュアン密度で，この $d\boldsymbol{x}$ 積分がラグランジュアンであり，最初の2項は自由スカラー場の項で，第3項は相互作用項である．m はスカラー粒子の質量，λ は結合定数である．N は正規化定数で，$\mathcal{D}[\phi]$

は，スカラー場 $\phi: \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{d-1}\to\boldsymbol{R}$ 全体の空間上の一様‘測度’で形式的には，各時空点 $(t,\boldsymbol{x})$ ごとに $d\phi(t,\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{R}$ のルベーグ測度とすると，$\mathcal{D}[\phi]=\prod_{(t,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{d-1}} d\phi(t,\boldsymbol{x})$ と書ける．(6.1) はグリーン関数の生成汎関数であり，物理的に重要な n 点グリーン関数は，$Z(J)$ の J に関する n 階の汎関数微分で与えられる．

構成的場の量子論の問題は，このような汎関数積分を意味づけ実現する問題とも言える．その方法は，(6.1) において，いったん虚数時間に移行 $t\to -it$ するユークリッド化を行ない，その際 $x_0=t$, $x=(x_0,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^d$ とおき，$\phi(-it,\boldsymbol{x})$, $J(-it,\boldsymbol{x})$ を $\phi(x)$, $J(x)$ と書くと，このユークリッド時空での場 $\phi: \boldsymbol{R}^d\to\boldsymbol{R}$ の全体の空間上の汎関数積分

$$Z_E(J) = N\int_{\{\phi:\boldsymbol{R}^d\to\boldsymbol{R}\}}\exp\Big(-\int dx\,[2^{-1}|\nabla\phi(x)|^2+2^{-1}m^2\phi(x)^2 + \lambda\phi(x)^4+J(x)\phi(x)]\Big)\mathcal{D}[\phi] \qquad (6.3)$$

のほうの実現を考える．ただし，各 $x\in\boldsymbol{R}^d$ ごとに $d\phi(x)$ を $\boldsymbol{R}$ のルベーグ測度とすると，$\mathcal{D}[\phi]=\prod_{x\in\boldsymbol{R}^d} d\phi(x)$ である．また $|\nabla\phi(x)|^2=\sum_{j=0}^{d-1}(\partial_{x_j}\phi(x))^2$ であり，(6.3) の右辺の指数関数の肩の積分が，3° 節と同じように，ハミルトニアンの時間 dx_0 積分に変わった．(6.3) の意味づけの仕方は，まず，$\boldsymbol{R}^d$ 全体で考える代わりに，有限体積の直方体 Λ で考え，さらに Λ を1辺 a の格子 $(a\boldsymbol{Z})^d\cap\Lambda$ で近似する．すると問題は，格子上の統計力学の分配関数を求める問題になる．そして，$a\to 0$, $\Lambda\to\boldsymbol{R}^d$ の両極限として (6.3) に当たるものの存在をいい，それがいえたら最後に，もとのミンコフスキー時空に戻せることを確かめ，(6.1) に当たるものの構成を達成する．実際

$$\exp\Big(-\int dx\,[2^{-1}|\nabla\phi(x)|^2+2^{-1}m^2\phi(x)^2+\lambda\phi(x)^4]\Big)\mathcal{D}[\phi]$$

から緩増加な超関数の空間 $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d)$ 上の測度を構成しようとするのである．$d\le 3$ のときは，このような手続きでうまくいくようだが，$d=4$ ではまだ完全には決着がついていないようである．

光子と電子の世界を記述する**量子電磁力学** (QED : Quantum Electrodynamics) でも，話はより複雑になるが，やはりグリーン関数生成汎関数が意

味づけられればよいのだが，こちらのほうは問題がより難しい．Feynman 自身が亡くなる直前に書いた本 [11] では，一般向けに QED の経路積分に基づいたほとんど数式を用いない解説が楽しそうになされている．

これらの汎関数積分の意味づけを行なう代わりに，これらがみたす汎関数微分方程式（Schwinger-Dyson 方程式）を問題にすることもできる（[21]）．

場の量子論の詳細については，[7]，[17] などを参照されたい．

最後に，「数理物理 '89」においてこの講義の機会を与えて下さった荒木・江沢両先生に感謝したい．

参考文献

[1] S. A. Albeverio & R. J. Høegh-Krohn, *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals*, Lect. Notes in Math. No. **523**, Springer, 1976.

[2] Ph. Blanchard, Ph. Combe, M. Sirugue & M. Sirugue-Collin, Probabilistic solution of the Dirac equation, BiBos preprint No. **44**, 1985. [Ph. Combe, M. Sirugue & M. Sirugue-Collin, In: *The 8th Internat. Congress M∩Φ Marseille 1986*, pp. 421 – 430, World Scientific]

[3] R. H. Cameron & D. A. Storvick, A simple definition of the Feynman integral, with applications, *Memoirs Amer. Math. Soc.* No. **288** (1983).

[4] I. Daubechies & J. R. Klauder, Quantum-mechanical path integrals with Wiener measures for all polynomial Hamiltonians. II, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 2239 – 2256.

[5] P. A. M. Dirac, The Lagrangian in quantum mechanics, *Physik. Zeits. Sowjetunion* **3** (1933), 64 – 72.

[6] 江沢 洋，量子力学I，第5章 p. 249，第7章，pp. 413，420，岩波講座，現代の物理学の基礎（第2版）3.

[7] 江沢 洋・新井朝雄，場の量子論と統計力学，日本評論社，1988.

[8] L. D. Faddeev, Introduction to functional methods, In : *Methods in Field Theory*, Les Houches, École d'Été de Physique Théorique, Session XXVIII (1975), 1 – 40, North-Holland and World Scientific 1976, 1981.

[9] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367 – 387.

[10] R. P. Feynman & A. P. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[11] R. P. Feynman, *QED, The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton Univ. Press, 1985 (邦訳：「光と物質のふしぎな理論—私の量子電磁気学」岩波書店, 1987).

[12] 藤原大輔・浅田健嗣, Schrödinger 方程式の基本解の構成, 数学 **33** (1981), 97 − 119.

[13] D. Fujiwara, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, *Nagoya Math. J.* **124** (1991), 61 − 97 ; Some Feynman path integrals as oscillatory integrals over a Sobolev manifold, In : *Functional Analysis and Related Topics*, 1991, Springer Lect. Notes in Math. No. **1540** (1993), 39 − 53.

[14] C. Garrod, Hamiltonian path-integral methods, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966), 483 − 493.

[15] B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac & L. S. Schulman, Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), No. 5, 419 − 422.

[16] I. M. Gelfand & A. M. Yaglom, Integration in functional spaces and its applications in quantum physics, *J. Math. Phys.* **1** (1960), 48 − 69.

[17] J. Glimm & A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*, Springer, 1987.

[18] S. T. Hawking, *A Brief History of Time. From the big bang to black holes*, Bantam Books 1988 (邦訳：ホーキング, 宇宙を語る. ビッグバンからブラックホール, 早川書房)

[19] 一瀬 孝, Dirac 方程式に対する経路積分をめぐって, 数学 **42** (1990), 219 − 230.

[20] T. Ichinose & H. Tamura, Path integral approach to relativistic quantum mechanics-Two-dimensional Dirac equation —, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* No. 92 (1987), 144 − 175.

[21] 井上 淳, 汎関数微分方程式について—汎関数空間上の解析学の勧め, I, II, 数学 **42** (1990), 170 − 177, 261 − 265.

[22] K. Itô, Generalized uniform complex measure in Hilbert metric spaces and their applications to the Feynman path integrals, *Proc. 5 th Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability*, Vol. **2**, Part 1, 145 − 161, 1967.

[23] M. Kac, *Probability and Related Topics in the Physical Sciences*, *Interscience*, New York, 1959.

[24] J. R. Klauder, Measure and support in functional integration, In : *Progress in Quantum Field Theory* (ed. H. Ezawa & S. Kamefuchi), Elsevier Sci. Publ., pp. 31 − 56 (1986).

[25] V. P. Maslov and A. M. Chebotarev, Generalized measure in Feynman path integrals, *Theor. and Math. Phys.* **28** (**1**) (1976), 793 − 805.

[26] V.P.Maslov and A.M.Chebotarev, Jump-type processes and thier applications in quantum mechanics, *Transl. Journal of Soviet Math*. **13** (1980), 315 – 357.

[27] M.M.Mizrahi, Phase space path integrals, without limiting procedure, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 298 – 308 ; *Erratum, ibid*. **21** (1980), 1965.

[28] E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 332 – 343.

[29] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Revised and enlarged edition, Academic Press, New York, 1980.

[30] E. Schrödinger, Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quanten-mechanik, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, **24** (1930), 418 – 428.

[31] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York, 1979.

[32] L. Streit & T. Hida, Generalized Brownian functionals and Feynman integrals, *Stochastic Process. Appl.* **16** (1983), 55 – 69.

[33] A. Truman, The polygonal path formulation of the Feynman path integral, In : *Feynman Path Integral*, Lect. Notes in Phys., No. **106**, pp. 73 – 102, Springer, 1979.

[34] T. Zastawniak, Path integrals for the Dirac equation — Some recent developments in mathematical theory, In : *Stochastic analysis, path integration and dynamics*, Pitman Research Notes in Math. No. **200** (1989), 243 – 263.

第6話

ランダムウォーク表示，臨界現象，場の量子論

近藤慶一

1° はじめに

相対論的場の量子論は，朝永，Schwinger，Feynman および Dyson による摂動的くりこみ理論によって発散の困難を回避し，量子電磁力学（QED）において，実験との驚異的一致をみた．しかし，物理理論としての整合性，内部無矛盾性に関しては，**公理論的場の理論**などの多くの研究にもかかわらず，決定的な判断を下せるような段階には達しなかった．**構成的場の理論**［11］とは，相対論的場の量子論を，その原点に戻って，一歩一歩，数学的に厳密に構成しようとする試みである．スカラー場の φ^4 理論は，構成的場の理論の当面の目標とされてきた．

最近の格子正則化を経由する連続場の理論の構築は，次のようなステップをたどる．まず，D 次元の連続時空上の φ^4 理論を，ユークリッド空間上の（格子間隔 a の）D 次元格子上の模型におき換える．その後，格子間隔をゼロにする連続極限をとることを考える．もちろん，相対論的であるためには，ユークリッド空間からミンコフスキー空間に解析接続しなくてはならない．この方法の最大のメリットは，格子正則化した格子スカラー模型は強磁性スピン模型と等価になる点である．これによって，連続極限の問題は対応する統計力学系の臨界点近傍のスケーリング問題におき換わる．こうして最近では，場の理論と統計力学は共通の問題意識のもとで論じられるようになり，Statistical field theory［10］という言葉が用いられるようになってきた．

場の理論としての最大の問題は，こうして作った連続場の理論が相互作用を含んでいるか否かである．相互作用のある φ^4 理論が作れるとは，格子模型を定

義する bare parameters を格子間隔に依存させ，その関数形をうまく調節して（くりこみ操作），連結相関関数，または，くり込まれた結合定数が，ノンゼロに収束するように，格子間隔をゼロにする連続極限がとれることを意味する．いかに，くり込もうと，連結相関関数が，連続極限でゼロに収束する（ガウス型にしか収束しない）とき，φ^4 理論は**自明**（trivial）であると呼ばれる．これは，物理的には，スカラー粒子間に散乱が生じないことを意味する．

しかし，80年代に入って，Aizenman [5] と Fröhlich [4] によって $D \geq 5$ 次元では，bare parameters をどうくり込もうと，2点のグリーン関数が有限（かつノンゼロ）になるようにくり込みを行なう限り，連続極限としての φ^4 理論は相互作用をもちえないことが証明されてしまったのである．しかも，$D=4$ も例外ではなさそうなのである．この証明には彼らが開発したランダムウォーク表示 [3] が用いられた．この方法は，確率（過程）論の観点からみても興味深いと思われる．次節で，ランダムウォークとブラウン運動の関係を復習しよう．

2° ランダムウォークとブラウン運動

ユークリッド的量子場における次元の役割を考えるために，文献 [10] に従ってブラウン運動を思い出そう．D 次元のユークリッド空間 R^D 上で考えたいが，まず，その中の正則格子を考える．以下，$x=(x^1, \cdots, x^D)$ は格子点を表すので，座標 x^i $(i=1, \cdots, D)$ は格子間隔 a を単位として整数値をとる．連続極限（これが物理として最も重要であるが）はあとで考える．各格子点は q 個の最近接格子点をもつ，もちろん正方格子なら $q=2D$ である．普通，**ランダムウォーク**（Random Walk；以下 RW と略す）とは，ある時間間隔 τ で一つの格子点からランダムに隣の格子点にジャンプする事象をいう．ここで，引き続くジャンプは統計的に独立と仮定する．

RW の連続極限として **ブラウン運動** が得られることは，次のようにしてわかる．最初，時刻 t_0 に x_0 にいたウォーカーが，時刻 t_1 に格子点 x_1 にいる条件確

率を $P(x_1, t_1; x_0, t_0)$ と書こう．もちろん $P \geq 0$ である．$t_1 = t_0$ では，$x_1 = x_0$ でない限り $P = 0$ なので

$$P(x_1, t_1; x_0, t_0) = \delta_{x_1, x_0} \equiv \prod_{\mu=1}^{D} \delta_{x_1^\mu, x_0^\mu}. \tag{2.1}$$

確率 P は $t_1 \geq t_0$ に対して定義されるが，時間と空間に対する平行移動不変性から，差 $t_1 - t_0$, $x_1 - x_0$ にしかよらない．時刻 t_1 を固定すると，規格化条件

$$\sum_{x_1} P(x_1, t_1; x_0, t_0) = 1 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

この RW 模型を用いて，格子上に定義された理論から連続極限をどうやってとればよいかを学ぶことができる．離散化した定式化は一般に格子の選択に強く依存する．しかし，我々は，そのような格子の特別な構造によらない漸近的性質にのみ興味がある．

時刻 t と $t+\tau$ での確率の間には，次の関係式

$$P(x, t+\tau; x_0, t_0) = \frac{1}{2D} \sum_{x' : |x-x'|=a} P(x', t; x_0, t_0) \tag{2.3}$$

が成り立つ．なぜなら，ウォーカーは，1 単位時間 τ 前に，隣接する格子点 $x' = x \pm a e_\mu$ (e_μ は μ 方向の単位ベクトル) にいた場合のみ点 x に到達できるからである．確率 P は，方程式 (2.1) ～ (2.3) で完全に決定される．方程式 (2.3) はフーリエ変換を用いれば簡単に解くことができて [10]

$$P(x_1, t_1; x_0, t_0) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik\cdot(x_1 - x_0)} \left(\frac{1}{D} \sum_\mu \cos k_\mu \right)^{t_1 - t_0}. \tag{2.4}$$

さて，格子間隔 a に比べて長距離でかつ長時間での P の漸近的性質を求めることにしよう．そのために，格子間隔 a と時間間隔 τ とを用いて，時間と距離を $t \to \dfrac{t}{\tau}$, $x \to \dfrac{x}{a}$ のようにリスケールすると，

$$P(x_1, t_1; x_0, t_0) = a^D \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik\cdot(x_1 - x_0)} \left(\frac{1}{D} \sum_\mu \cos a k_\mu \right)^{\frac{t_1 - t_0}{\tau}}. \tag{2.5}$$

ここで，物理的な距離と時間を固定したまま，$a \to 0$, $\tau \to 0$ となる極限をとろ

う．点 x を含む微小体積 Δx に対して $\Delta x \gg a^D$，かつ $t_1-t_0 \gg \tau$ のときには，確率密度 $p=\dfrac{P}{a^D}$ を次のように定義できる．

$$p(x_1-x_0,\, t_1-t_0)\Delta x = \sum_{x_1' \in x_1+\Delta x} P(x_1'-x_0,\, t_1-t_0)$$

$$\sim \frac{\Delta x}{a^D} P(x_1-x_0,\, t_1-t_0) \tag{2.6}$$

よって

$$p(x_1-x_0,\, t_1-t_0) = \lim_{a,\tau\to 0} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} e^{ik\cdot(x_1-x_0)} \left(\frac{1}{D}\sum_\mu \cos ak_\mu\right)^{\frac{t_1-t_0}{\tau}} \tag{2.7}$$

となる．しかし，連続極限を勝手にとると，結果は自明になってしまうことに注意しなくてはいけない．この場合，自明でない結果を得るためには，比 $\dfrac{\tau}{a^2}=$ 一定 となるように $a\to 0$，$\tau\to 0$ の極限をとらねばならない．この場合，

$$p(x_1-x_0,\, t_1-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} e^{-(t_1-t_0)k^2+i(x_1-x_0)\cdot k}$$

$$= \frac{1}{[4\pi(t_1-t_0)]^{D/2}} \exp\left(-\frac{(x_1-x_0)^2}{4(t_1-t_0)}\right). \tag{2.8}$$

これは，連続空間における拡散方程式の基本解である．実際，格子上のラプラシアン Δ を定義すれば（2.3）は，拡散方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)P = 0 \tag{2.9}$$

（の差分近似）に従う．特に，(2.8) は，マルコフ過程の特徴である関係式

$$\int d^Dx_1 p(x_2, t_2; x_1, t_1) p(x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_2, t_2; x_0, t_0) \tag{2.10}$$

をみたす．蛇足だが，これはガウス積分の畳み込みの性質を保持しているので，経路積分の構成の際使用される．

読者は，先の連続極限で，なぜ $\dfrac{\tau}{a^2}$ を一定にするのか，$\dfrac{\tau}{a}$ が一定のほうが自然なのではなかろうかと不思議に思うかもしれない．しかし，これで正しいのである．この単純な RW は連続極限でブラウン運動になるが，ブラウン曲線

(Brownian curve) は "次元" 2 をもつからである．ここでいう次元とは拡張された意味の次元で，ハウスドルフ次元と呼ばれるものである．フラクタルを知っている読者は，一見，直線的なコッホ曲線が次元 $\dfrac{\log 4}{\log 3}$ をもつことや，Sierpiński のガスケットが，次元 $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ をもつことを知っているだろう．つまり，ブラウン曲線は，単位時間 τ に距離 a だけ進むとすれば，$(t_1-t_0)\sim|x_1-x_0|^2$ のように振る舞う．また，いい換えれば，ブラウン曲線が時間間隔 t_1-t_0 の間に体積 Ω に（ほとんど確実に）含まれていたとすると，$\lambda(t_1-t_0)$ だけ経過したときブラウン曲線を包みこむのに要する体積は $\lambda^{D/2}\Omega$ である．ブラウン運動が "次元" 2 をもつために，ブラウン経路 (path) は次元 $D>4$ では (確率 1 で) 交わらないのである．このことは Dvoretsky - Erdos - Taylor と Lawler たちによって示された [16]．これは場の理論の連続極限を考える際に大変重要な手掛かりを与えることになる．

3° ランダムウォーク表示とは

ここで述べる**ランダムウォーク表示** [3] とは，統計力学，場の量子論に現れる相関関数，あるいはグリーン関数を，ユークリッド空間上の RW に対応して導入される測度と重みによって表現するものである．ユークリッド的 φ^4 場の理論が，弱い自己回避 (self-avoiding (SA)) ランダムウォークとループの気体として表現できることは，Symanzik が初めて示した [2]．以下，$x=(x^1,\cdots,x^D)$ は格子点を表し，座標 x^i $(i=1,\cdots,D)$ は格子間隔を単位として整数値をとる．格子 L $(=D$ 次元正方格子 $Z^D)$ 上のランダムウォーク ω は，順序づけされたリンク（格子点の対）の集合である（図 1 参照）．すなわち，$\omega=\{\langle x_0,x_1\rangle,\langle x_1,x_2\rangle,\cdots,\langle x_{n-1},x_n\rangle\}$．このとき，たとえば最も簡単な 2 点のグリーン関数 $G(x,y)=\langle\varphi_x\varphi_y\rangle$ は，次のように表せる．

$$G(x,y)=\sum_{\omega:x\to y}z(\omega)=\sum_{\omega:x\to y}\int d\rho_\omega(t)z_\omega(t) \tag{3.1}$$

ここで，和は格子上で $x=x_0$ を出発し，$y=x_n$ で終わるすべての RW につい

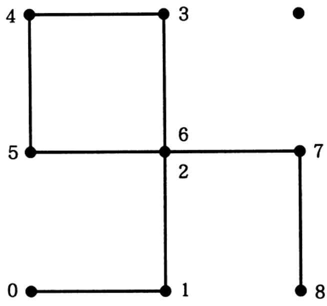


図1

てとる．さらに，測度 $d\rho_\omega$ は次のように与えられる．

$$d\rho_\omega(t) = \prod_x d\rho_{n_x(\omega)}(t_x), \qquad d\rho_n(t) = \begin{cases} \delta(t)\,dt & (n=0) \\ \theta(t)\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで，$\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数，$\theta(t)$ は Heaviside の階段関数，つまり $\theta(t)=1$ $(t>0)$，0 $(t<0)$，そして $n_x(\omega)$ は RW ω が点 x を通過する回数を表す．最後に，$z_\omega(t)$ は考えている理論に対応して決まるウエイト（重み）である．RW 表示を使って与えられた理論を書き直したとき，その違いを区別するものはこの重みである．

統計力学系，場の理論の模型を論じるために，期待値（汎関数）を定義しよう．

$$\langle\cdots\rangle = Z^{-1}\int\prod_{x\in L} d\varphi_x g(\varphi_x^2)\exp\{-H[\varphi]\}\cdots \tag{3.3}$$

ここで，Z は分配関数で

$$Z = \int\prod_{x\in L} d\varphi_x g(\varphi_x^2)\exp\{-H[\varphi]\} \tag{3.4}$$

で定義される．以下，ハミルトニアン $H[\varphi]$ は

$$H[\varphi] = -\sum_{i,j}\beta J_{i,j}\varphi_i\varphi_j - \sum_j h_j\varphi_j \tag{3.5}$$

の型に制限する．これはまさに最近接相互作用 J_{ij}（すなわち $J_{ij}=J>0$ ($|i-j|=a$), 0（その他））をもつ強磁性体のハミルトニアンで，h_j は外部磁場に相当する．特に，

$$g(\varphi^2) = \delta(\varphi^2-1) = \frac{1}{2}[\delta(\varphi+1)+\delta(\varphi-1)] \tag{3.6}$$

の場合がイジング模型を表す．また，

$$g(\varphi^2) = \exp[-V(\varphi^2)] \tag{3.7}$$

ととれば，ポテンシャル $V(\varphi^2)$ をもつスカラー場の理論，特に

$$V(\varphi^2) = \lambda\varphi^4 + \mu^2\varphi^2 \tag{3.8}$$

の場合を $\lambda\varphi^4$ 模型と呼ぶ．自由場は $V(\varphi^2) = \frac{1}{2}\sigma\varphi^2$（$\sigma = 2DJ+m^2$）で表せる．以下問題になる $d\nu \equiv d\varphi_x g(\varphi_x^2) \in$ BFS クラスとは，$V''(\varphi^2) \geq 0$ の場合をいう．$\lambda > 0$ なら $\lambda\varphi^4$ 模型は BFS クラス [3] に属す．恒等式

$$\varphi\int d\rho_{n-1}(t)g(\varphi^2+2t) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\int d\rho_n(t)g(\varphi^2+2t) \tag{3.9}$$

を用いれば，一般に

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \frac{Z(\boldsymbol{t})}{Z(0)}, \qquad Z(t) \equiv \int\prod_{x\in L} d\varphi_x g(\varphi_x^2+2t_x)\exp\{-H[\varphi]\} \tag{3.10}$$

と書けることがわかる．

相互作用のないガウス型の場合は簡単である．この場合，重みは

$$\boldsymbol{z}_\omega(\boldsymbol{t}) = J_\omega \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = J_\omega\prod_x \exp(-\sigma_x t_x) \tag{3.11}$$

となることがすぐわかり，積分が実行できる．

$$\langle\varphi_x\varphi_y\rangle = \sum_{\omega:x\to y} J_\omega\prod_z \sigma_z^{-n_z(\omega)} \tag{3.12}$$

ここで，J_ω は次の積を表す．

$$J_\omega = J_{\omega(0)\omega(1)}J_{\omega(1)\omega(2)}\cdots J_{\omega(n-1)\omega(n)}, \qquad \omega(j) = x_j. \tag{3.13}$$

格子点を添え字としてもつ対角行列 $S_{ij}=\sigma_j\delta_{ij}$ を考えると，実は (3.12) は次のように書ける．

$$\langle\varphi_x\varphi_y\rangle = (S-J)^{-1}_{x,y} \tag{3.14}$$

特に $\sigma=m^2+2DJ$ とすれば，差分ラプラシアンを用いて

$$\langle\varphi_x\varphi_y\rangle = (-J\Delta+m^2)^{-1}_{x,y} \tag{3.15}$$

となり，($J=1$ とおけば) 質量 m をもつ自由スカラー場の 2 点関数と一致することがわかる．積分変数 $t_x\in[0,\infty)$ は local time と呼ばれ，RW ω が点 x ですごす時間に相当する．このことは，熱核 (heat kernel)

$$\exp\,[-T(-J\Delta+m^2)] = \sum_{\omega:x\to y}J_\omega\int d\rho_\omega(t)\exp\Bigl[-\sum_z\sigma_z t_z\Bigr]\delta\Bigl(T-\sum_z t_z\Bigr) \tag{3.16}$$

が，方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-J\Delta+m^2\right)\exp\,[-T(-J\Delta+m^2)] = 0 \tag{3.17}$$

をみたすことから従う．このように，自由場の理論はブラウン運動として表現できることがわかる．しかし一般には，理論に相互作用があると，重みは各格子点での重みの積には書けない．だから，相互作用がある場合は積分をあらわに実行することはできないが，次に述べる相関不等式を用いて相関関数を評価することができる．

ここで，場の理論の模型と RW の模型との関係を述べておこう．N 成分 $\lambda\varphi^4$ 理論 (つまり $\vec{\varphi}$ が N 次元ベクトル) に対しては，

$$z(t) = \prod_z e^{-\lambda t_z^2-\sigma t_z}\left\langle\exp\Bigl[-\sum_x\lambda t_x|\vec{\varphi}_x|^2\Bigr]\right\rangle. \tag{3.18}$$

よって，$N\to0$ 極限は，Edwards の RW 模型である [8]：

$$z_\lambda(t) = \prod_z e^{-\lambda t_z^2-\sigma t_z}. \tag{3.19}$$

さらに，この強結合極限 $\lambda\to\infty$ (同時に $\sigma=-[2\lambda\ln(\lambda/\pi)]^{1/2}$ と調整して) は，SARW 模型となる [8]．なぜなら，

$$\int d\rho_n(t)\, e^{-\lambda t^2-\sigma t} \to \delta_{n,0}+\delta_{n,1}. \tag{3.20}$$

また，SARW 模型は非線形シグマ模型 $g(\varphi^2)=\delta(|\vec{\varphi}|^2-N)$ の $N\to 0$ 極限とみることもできる [7].

4° 相関不等式とランダムウォーク表示

RW 表示はさまざまな**相関不等式**を導くことができる．相関不等式とは相関関数の間に成り立つ不等式の総称である．最もよく知られているものは **GKS** (Griffiths - Kelly - Sherman) 不等式 [11], [16] である.

定義1　関数 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ に対して，$f\in\mathcal{F}$ とは，$f(x)$ は (1) 偶関数，もしくは奇関数，(2) $f(x)\geq 0$ かつ $f'(x)\geq 0$ $(x\geq 0)$ の二つの条件をみたしていることである.

命題0　式 (3.3) ～ (3.5) で定義される強磁性模型を考える $(J>0)$．任意の $f_x(\varphi_x), g_x(\varphi_x)\in\mathcal{F}$ に対して，次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle F\rangle &\geq 0,\\ \langle F;G\rangle \equiv \langle FG\rangle-\langle F\rangle\langle G\rangle &\geq 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで,

$$F=\prod_x f_x(\varphi_x), \qquad G=\prod_x g_x(\varphi_x). \tag{4.2}$$

この GKS 不等式の重要さは，さまざまな期待値の単調性を主張することにある．たとえば，2点関数が温度に関して単調増加であることは,

$$\frac{\partial\langle\varphi_x\varphi_y\rangle}{\partial\beta}=\sum_{i,j} J_{i,j}\langle\varphi_x\varphi_y;\varphi_i\varphi_j\rangle\geq 0 \tag{4.3}$$

からただちにわかる.

特に，Aizenman [5] と Fröhlich [4] によって独立に得られた4点相関関数に対する相関不等式（AF 不等式）はきわめて重要である．AF 不等式は，荒っぽくいうと，二つの RW が交差する確率をそれらが交差する平均回数で押さ

えるものである．これは，二つの RW 達が次元 $D>4$ では決して交わらないという直感を厳密にしてくれる．

まず，連結4点相関関数は次のように定義される．

$$U_4(x_1, \cdots, x_4) = \langle \varphi_{x_1}\varphi_{x_2}\varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle - \langle \varphi_{x_1}\varphi_{x_2}\rangle\langle \varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle - \langle \varphi_{x_1}\varphi_{x_3}\rangle\langle \varphi_{x_2}\varphi_{x_4}\rangle - \langle \varphi_{x_1}\varphi_{x_4}\rangle\langle \varphi_{x_2}\varphi_{x_3}\rangle \tag{4.4}$$

理論がガウス型つまり自由場なら，$U_4=0$ なので U_4 は相互作用の強さの目安になる．4点関数は二つの RW ω_1, ω_2 に関して RW 表示をもつ：

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{x_1}\varphi_{x_2}\varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle &= \sum_{\text{perm}} \sum_{\omega_1: x_1\to x_2;\ \omega_2: x_3\to x_4} z(\omega_1, \omega_2) \\ &= \sum_{\text{perm}} \sum_{\omega_1: x_1\to x_2;\ \omega_2: x_3\to x_4} J_{\omega_1} J_{\omega_2} \int d\rho_{\omega_1}(t_1)\, d\rho_{\omega_2}(t_2)\, z(t_1+t_2)\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで，perm は4点を2本の RW で結ぶ3通りの場合を表す．よって，連結相関関数の RW 表示は

$$\begin{aligned}&U_4(x_1, \cdots, x_4) \\ &= \sum_{\text{perm}} \sum_{\omega_1: x_1\to x_2;\ \omega_2: x_3\to x_4} [z(\omega_1, \omega_2) - z(\omega_1) z(\omega_2)] \\ &= \sum_{\text{perm}} \sum_{\omega_1: x_1\to x_2;\ \omega_2: x_3\to x_4} J_{\omega_1} J_{\omega_2} \int d\rho_{\omega_1}(t_1)\, d\rho_{\omega_2}(t_2)\, [z(t_1+t_2) - z(t_1) z(t_2)]\end{aligned} \tag{4.6}$$

と書ける．

命題1　もし考えている理論が BFS クラスに属すなら，

$$\sum_{\omega_1: x_1\to x_2} [z(\omega_1, \omega_2) - z(\omega_1) z(\omega_2)] \le 0, \tag{4.7}$$

すなわち，$U_4(x_1, \cdots, x_4) \le 0$（Lebowitz の不等式）が成立する．

これは，GKS の相関不等式を用いて証明できる．これを用いるための条件として，BKS クラスに属すという条件がいる．さらに，

命題2　もし $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$ なら，

$$z(\omega_1, \omega_2) \ge z(\omega_1) z(\omega_2). \tag{4.8}$$

これは，もし二つの RW が交差しなくなれば $U_4(x_1, \cdots, x_4) = 0$ となり，こ

の理論は相互作用を含まない理論になってしまうことを意味している．一般に，二つの RW は互いに相互作用を及ぼしあっているが，連続極限で RW がブラウン運動に収束すれば，それは相互作用のない理論に収束したことを意味する．2本のブラウン運動は $D>4$ では交差しないので，上の二つの命題は，連続極限で二つの RW が交差する確率がゼロになって理論が自由場になっていれば矛盾しない．実際，これは AF 不等式を用いて証明できる．AF 不等式は U_4 の下限を与えるが，その主要な項だけを書くと（図2参照），

定理1　1および2成分スカラー φ^4 模型（BFS クラスに属するスピン系）において，

$$U_4(x_1,\cdots,x_4)\ \geq\ -\sum_{\rm perm}\ \sum_{z,z',z'';\,|z-z'|=|z-z''|=1}\langle\varphi_{x_1}\varphi_z\rangle J_{z,z'}\langle\varphi_{z'}\varphi_{x_2}\rangle\langle\varphi_{x_3}\varphi_{z''}\rangle J_{z'',z}\langle\varphi_z\varphi_{x_4}\rangle. \tag{4.9}$$

U_4 が負の量であることは，場の理論の言葉でいえばスカラー粒子間には反発力が働くことを意味する．

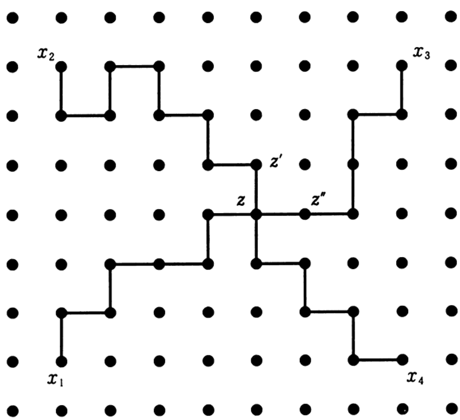


図2

5° 臨界点統計力学とランダムウォーク表示

相関不等式がどのように使われるか，強磁性体の帯磁率を例にとって見てみよう．帯磁率 χ は

$$\chi = \sum_y \langle \varphi_0 ; \varphi_y \rangle, \qquad \langle \varphi_0 ; \varphi_y \rangle \equiv \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle - \langle \varphi_0 \rangle \langle \varphi_y \rangle \tag{5.1}$$

で定義される．ここで，和はすべての格子点についてとる．強磁性体においては，十分高温では自発磁化 $\langle \varphi \rangle$ はゼロだが，温度をだんだん下げていくと，ある温度 T_c (臨界温度) で自発磁化が生じる．この相転移は2次の相転移で帯磁率は

$$\chi \sim (\beta_c - \beta)^{-\gamma} \tag{5.2}$$

のように $\beta = \beta_c\ (\equiv 1/kT_c)$ で発散する．このとき，γ は **臨界指数** と呼ばれる．γ は一般には次元によって異なる値をとる．イジング模型に関しては，$D=2$ 次元の (Onsager の) 厳密解から $\gamma = \dfrac{7}{4}$ が厳密にいえるが，$D=3$ ではいろいろなアプローチから $\gamma = 1.17$ くらい，$D \geq 4$ では平均場近似の予言する値 $\gamma = 1$ が正しいと信じられてきた．実際，AF 不等式を使えば，$D \geq 5$ で $\gamma = 1$ を厳密に証明できる．そのためには，

$$c_1 \leq \chi^{-2} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} = -\frac{\partial \chi^{-1}}{\partial \beta} \leq c_2 \tag{5.3}$$

となるような (温度に関して一様な) 正定数 c_1, c_2 の存在を示せばよい．$\beta \uparrow \beta_c$ のとき $\chi^{-1}(\beta) \downarrow 0$ となることに注意すれば，この不等式の両辺を β から β_c まで積分して

$$c_1{}^{-1}(\beta_c - \beta)^{-1} \geq \chi(\beta) \geq c_2{}^{-1}(\beta_c - \beta)^{-1}$$

を得る．まず，c_2 の存在は

$$\gamma \geq 1 \tag{5.4}$$

を意味するが，これは Lebowitz の不等式を適用すれば簡単に導ける．なぜなら，

$$\frac{\partial \chi}{\partial \beta} = \sum_x \langle \varphi_0 \varphi_x ; \sum_{y,z;|y-z|=1} \varphi_y \varphi_z \rangle = 2D\chi^2 + \sum_{x,y,z;|y-z|=1} U_4(0,x,y,z), \quad (5.5)$$

つまり，$\gamma \geq 1$ は次元に無関係に成立し，平均場の値を下限としてもつことがわかる．さらに，c_1 の存在を示せば，$\gamma \leq 1$ を意味するから，両方合わせると $\gamma = 1$ を導く．実際，AF 不等式を U_4 の下限の評価に用いて，$D > 4$ では温度に依存しない定数 c_1 $(0 < c_1 < 2D)$ の存在を導ける．しかし，これは，多分に技術的側面をもっているので，興味ある読者は文献を参照していただきたい [14]．

6° ランダムウォーク表示の成果

Random Path (RP) 表示は，統計力学における臨界現象と場の理論における連続極限に関する最近の進展において重要な役割を果たした．特に，高次元 $D > 4$ での φ^4 およびイジング模型などにおける連続極限の自明性（相互作用がなくなること）と平均場的臨界指数の厳密証明，ハイパースケーリング $D\nu + \gamma - 2\Delta_4 = 0$ の破綻（不成立）が示された．一方，低次元 $D < 4$ での弱結合の（超くりこみ可能な）φ^4 模型の（構成的場の理論の意味での）構成の単純化などが特筆すべきものである．

RP 表示には，これまで紹介した Brydges-Fröhlich-Spencer (BFS) による格子上の（古典）スピン系（スピン変数は任意の実数値をとる）に対する RW 表示 [3] と，Aizenman による（古典）イジング模型（スピン変数は $\sigma_x = \pm 1$ の2値だけをとる）に対する Random current (RC) 表示 [5] がある．二つの表示は格子上のスピン系を表現するために開発され，基本的にはよく似ているし，多くの結果はどちらの表示からでも得られるが，最も深遠な結果は現在のところ RC 表示によって得られている．これは，RC 表示ではイジング模型の特殊性に起因する高度に技術的なテクニックを駆使できるからである．よって，RC 表示で得られた結果をイジング模型以外に拡張することは限られた範囲に特定される．これは Griffiths-Simon (GS) クラス [17] に属する場合に限って可能である．GS クラスは φ^4 模型を含む．一方，BFS クラス

は φ^4 模型を含むスカラー模型，スピン模型に適用でき，イジング模型は $\lambda\varphi^4$ 模型の強結合極限 $\lambda\to\infty$ として得られる．つまり，φ^4 模型は GS クラスにも BFS クラスにも含まれている．二つの RP 表示には一長一短があるが，2成分スピン系に対しては RC 表示は適用できず，この点では RW 表示が優れている．以後，どちらの方法からも得られる場合には'RP 表示から'と書き，RC 表示からしか得られないときにはその都度ことわることとする．

特に，$D=4$ の場合は難しい．$D=4$ では，N成分 $\lambda\varphi^4$ 模型に対して，くりこみ群の結果から

$$\chi \sim (\beta_c-\beta)^{-1}|\log(\beta_c-\beta)|^{(N+2)/(N+8)} \tag{6.1}$$

が期待されるからである．残念ながら，現在でもこれの厳密証明には成功していない（λ が十分小さい場合には厳密ブロック・スピンくりこみ群による証明がある）が，Aizenman と Graham [6] は RC 表示を用いることで，次のような AF 不等式の拡張に成功した．

定理 2　イジング模型と1成分 φ^4 模型（GS クラスに属するスピン系）において，

$$U_4(x_1,\cdots,x_4) \geq -\sum_{z,z';|z-z'|=1}\langle\varphi_{x_1}\varphi_z\rangle\langle\varphi_{z'}\varphi_{x_2}\rangle J_{x,y}\frac{\partial}{\partial J_{x,y}}\langle\varphi_{x_3}\varphi_{x_4}\rangle+\cdots \tag{6.2}$$

これから，少し弱い結果

$$(\beta_c-\beta)^{-1} \leq \chi \leq (\beta_c-\beta)^{-1}|\log(\beta_c-\beta)| \tag{6.3}$$

が得られる．$D=4$ においては，このような対数補正が場の理論の連続極限を論じるにもきわめて重要であることがわかっている．ランダムウォークの交差確率にも似たような因子が現れる [9]．

これまで紹介した結果は，対称領域つまり $\langle\varphi\rangle=0$ となる場合（相）に限られているが，外部磁場がある場合にも拡張できる．実際，RP 表示を外部磁場がある場合に拡張することによって得られた相関不等式から，次元 $D>4$ での φ^4 模型とイジング模型に対して（非対称領域つまり $\langle\varphi\rangle\neq 0$ において）ハイパース

ケーリング $D\nu' = \gamma' + 2\beta$ の破綻が導かれ，さらに RC 表示から次元 $D > 4$ でのイジング模型に対して平均場臨界係数 $\beta = \frac{1}{2}$，そして $D = 4$ での φ^4 模型とイジング模型の自明性に関する部分的な結果が得られた．RC 表示はさらに φ^4 模型とイジング模型に対して，低次元（$2 < D < 4$）で $\gamma \le \frac{2}{D-2}$（球型模型上限），任意次元で $\beta \le \frac{1}{2}$（平均場上限），中間相（磁化ゼロでかつ磁化率（磁気感受率）無限大となる相）が存在しないことなどを証明した．ただし，イジング模型に対する $D = 3$ 次元でのハイパースケーリング関係式 $D\nu + \gamma - 2\Delta_4 = 0$ は未だに厳密証明はない．

7° その後の進展

私が「数理物理」において，RW 表示とその応用を報告したのは1987年だが，その時点で未解決だった本質的な問題は未だに解明されていない．1992年になって，Fernandez, Fröhlich, Sokal [1] による単行本が出版された．それは彼らの '82年から '85年半ばまでの研究が核になっており，それらはそれ以後の研究で洗練され，また若干の拡張（8章にあげられている）もなされている．しかし，本質的に重要な新しい結果は得られていないように思われる．出版がこれほど遅れた理由として，一つは著者たちが地理的に離れていること，もう一つには各人がもっと緊急だと思われた他の課題（2次元の共形（conformal）場の理論とその周辺を指すと思われるが）に熱中していたことが挙げられている．特に，磁場が入った場合には，AF 不等式に対応するような強力な結果は得られていない．そのため，対称性の破れた相での，$D > 4$ における φ^4 理論の厳密証明は RW 表示の枠内では完全には達成されていない．

RW 表示から若干離れるが，場の理論の構成という観点から見れば，その後（Wilson 流の）**くりこみ群**に基づく構成法が採用されているが，この方法は概念的な点を別にして技術的には非常に難しく，見通しも必ずしもよくない．ただ，RW 表示を用いる方法はエレガントであるが，いつも可能とはいえない．こ

の解説を読んでこういうアプローチに興味を抱き，この分野を推進する者が出れば幸いである.

参考文献

[1] R. Fernandez, J. Fröhlich and A. Z. Sokal, *Random walks, critical phenomena, and triviality in quantum field theory*, Springer, New York, 1992.

本格的に勉強したい人は，この最も新しく詳しい単行本を参照してほしい．Symanzik のオリジナルな文献は

[2] K. Symanzik, Euclidean Quantum Field Theory, in *Local Quantum Theory*, ed. by R. Jost, Academic Press, New York, 1969.

BFS の RW 表示は

[3] D. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 123.

AF 不等式とその応用は

[4] J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B200** [FS4] (1982), 281.

[5] M. Aizenman, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981), 1 ; *Commun. Math. Phys.* **86** (1982), 1.

[6] M. Aizenman and R. Graham, *Nucl. Phys.* **B225** [FS9] (1983), 261.

さまざまなランダムウォーク模型の臨界現象に対するランダムウォーク表示によるアプローチは

[7] C. Aragao de Carvalho, S. Caracciolo and J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B215** [FS7] (1983), 209 − 248.

[8] A. Bovier, G. Felder and J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B230** [FS10] (1984), 119 − 147.

4次元でのランダムウォークの交差確率については

[9] G. F. Lawler, *Commun. Math. Phys.* **86** (1982), 539 − 554 ; M. Aizenman, ibid. **97** (1985), 91 − 110 ; G. Felder and J. Fröhlich, ibid. **97** (1985), 111 − 124.

ランダムウォークとブラウン運動の関係については

[10] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical field theory, volume* 1, *from Brownian motion to renormalization and lattice gauge theory*, Cambridge University Press, 1989.

構成的場の理論から見たランダムウォーク表示については

[11] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics*, *A functional integral point of view*, Second edition, Springer-Verlag, 1987.

日本語の成書としては

[12] 江沢 洋・新井朝雄，場の量子論と統計力学，日本評論社，1988.

[13] 新井朝雄，現代数理科学辞典 (大阪書籍，1991) ; 伊東恵一，構成的場の理論，数学，第38巻 (1986) 第2号，165 − 176.

$\gamma=1$ の RW 表示を用いる証明は
[14] K.-I. Kondo and T. Hara, *J. Math. Phys.* **28** (1987), 1206.
臨界現象の一般論とグラフ理論的アプローチは
[15] G. A. Baker, Jr., *Quantitative Theory of Critical Phenomena*, Academic Press, 1990.
確率過程と場の量子論との関係は
[16] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.
[17] B. Simon, *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton Univ. Press, 1974.

第 7 話

量子群 $SU_q(1,1)$

上野喜三雄

「量子群 $SU_q(1,1)$」というタイトルから読者の皆さんは何を期待されるでしょうか．$SU_q(1,1)$ の定義が与えられて，次にユニタリ表現が定義され，そして分類されていく．おそらく，そのようなストーリーを想像されるかと思います．この報告が $SU_q(1,1)$ などの「非コンパクト型」量子群の基本的参考書であるならば，そうした手順が踏まれるべきでしょう．また，そうであってこそ「数学」と言えるのでしょう．しかし，現実には，「非コンパクト型」量子群についての多くの数学者が納得しうる「標準的理論」は未だ存在しません．

だからといって，我々がまったくの混沌のなかにいるのかというと，それも違います．私たちはなんとかして $SU_q(1,1)$ をつかまえようとしてきたし，部分的にはそれに成功しています．$SU_q(1,1)$ は徐々にその姿を見せているのです．

こうした現状のなかで，この報告が書かれているのだということを頭のどこかに入れておいてください．

それから，この報告の構成について一言述べておきたいと思います．この報告の三分の二近くが，リー群 $SU(1,1)$ のユニタリ表現に関する記述で占められています．その理由についてコメントしておきたいのです．第一の理由．$SU(1,1)$ のユニタリ表現を全然知らないで，$SU_q(1,1)$ のユニタリ表現を学ぶというのは明らかに本末転倒です．理由の第二ですが，$SU_q(1,1)$ のユニタリ表現を研究していく際に我々がとった視点，技法は，もともと $SU(1,1)$ のユニタリ表現の研究のなかにあったものです．それを換骨奪胎して，量子群に合うように洗練したのです．その意味でも $SU(1,1)$ のユニタリ表現をある程度おさえておく必要があります．第三の理由は，リー群の世界と量子群の世界の差異をきちんと理解してほしいということです．これらの理由により，$SU(1,1)$ の記述を

大幅に増やす構成を採用したのです．

前置きはこれぐらいにして，本論に入りましょう．

1° フォック-メーラーの公式と $SU(1,1)$ の表現論

読者の皆さん（私は読者として，数学科，物理学科，あるいはもう少し広く見積もって，理工系の学部学生を念頭においています）は，おそらく二年生のときにフーリエ級数論とかフーリエ変換論を学ばれたと思います．

$f(x)$ が十分なめらかな周期 2π の周期関数ならば，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-imt}\,dt \tag{1.1}$$

が成立する．これがフーリエ級数論における反転公式というものでした．フーリエ変換のほうでは次のようになります．

$f(x)$ が十分なめらかで無限遠方で減少する関数とすると，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\xi t}\,dt \tag{1.2}$$

が成立する．どちらも美しい公式です．学生の時分初めてフーリエ変換論を学んだとき，その単純さと美しさに感動したことを今でもはっきりと覚えています．

それでは皆さん，次の公式をご存じですか．

$f(x)$ は十分なめらかで，$x\to+\infty$ において減少しているとしましょう．このとき，

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \nu\tanh(\pi\nu)\,P_{-1/2+i\nu}(x)\,d\nu\int_{1}^{\infty} f(t)\,P_{-1/2+i\nu}(t)\,dt \tag{1.3}$$

が成立する．$P_\nu(t)$ はルジャンドル関数と呼ばれる高級な関数で，超幾何関数を用いて次のように定義されます．

$$P_\nu(t) = F\left(-\nu,\,\nu+1,\,1\,;\,\frac{1-z}{2}\right) \tag{1.4}$$

ルジャンドル関数は指数関数のような初等関数ではありませんし，(1.3) の公式の形もフーリエの反転公式に比べればずいぶんと複雑です．しかし，「反転公式」という点では同じ構造をもっています．この公式をフォック-メーラーの公式と呼びます．私は根が不勉強な人間なので，この公式がいつごろどのような経緯で発見されたのか知りません．また，この公式を学んだのは，学部学生のときでも，大学院生のときでもありません．この報告のテーマである「$SU_q(1,1)$ の表現論」を研究するようになって，ようやくこの公式の存在を知ったのです．だから，あまり威張れたものではありません．

それはともかく，(1.1)，(1.2)，(1.3) の背後には共通した数学的構造があります．まず，これらはスツルム-リュウヴィル型作用素の固有関数系による展開定理（いわゆるチッツマーシュ-小平の展開定理です．1946年から48年にかけて確立されました）として解釈されます．要するに，反転公式をスペクトル理論の観点から理解できるということです．

（スツルム-リュウヴィル型作用素のスペクトル理論は美しいかっちりとした理論です．数学科の学部教育のなかではあまり取り上げられませんが，ぜひ勉強しておくべき古典的理論だと思います．教科書としては，岩波基礎数学『解析入門V』『スペクトル理論 I』，展開定理の諸例については，岩波数学演習叢書『関数解析と微分方程式』などが読みやすい．どれも名著です．）

一方，これらの反転公式には幾何学的，あるいは群論的解釈も可能です．ただし，群といっても有限群や離散群ではなく，リー群を考えねばなりません．

たとえば，(1.1) の背後にあるリー群は1次元トーラス群 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}=S^1$ です．この群のユニタリ表現は整数によってパラメトライズされます．

$$\chi_m : \boldsymbol{T} \ni t \to e^{imt} \in \boldsymbol{C}^\times \qquad (m \in \boldsymbol{Z}) \tag{1.5}$$

これが $\boldsymbol{T}$ の既約ユニタリ表現のすべてです．公式 (1.1) において考えている関数は周期 2π の関数ですから，トーラス上の関数とみなせます．それを既約ユニタリ表現の情報を使って展開しているわけです．

トーラスはコンパクトなアーベル群です．(1.2) に登場する群は加法群 $\boldsymbol{R}$ そのものです．これはアーベル群ですが，コンパクトではありません．さて，問

題のフォック-メーラーの公式の背後にいる群が何かというと，それは $SU(1,1)$ というリー群です．

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ; |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \tag{1.6}$$

と定義されます．群演算はいうまでもなく，行列の積です．アーベル群ではありません．また，位相的には，4次元ユークリッド空間の中の無限に拡がっている超曲面とみなせます．したがって，非コンパクトということになります．こうしたリー群を相手にして，その既約ユニタリ表現の情報を使って関数を展開する．つまり，フーリエ変換論をこうした非可換で非コンパクトなリー群の上に拡張しようとしているのです．そのとき得られる反転公式を「Plancherel の公式」と呼びます．

このような研究方向を総称して，「等質空間上の調和解析学（harmonic analysis)」と呼びます．それはリー群の表現論の研究のなかで重要な一分野をなしていて，1950年代に始まって今に至るまで現代数学の中核的な存在でした．その全貌をきちんと要約し評価するといった作業は，私のような鈍才かつグータラな人間の手に負えることではありません．

出来る，出来ないはともかくとして，$SU(1,1)$ のユニタリ表現をもう少し詳しく見ることにしましょう．

次のことが知られています．

（イ）$SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現は，恒等表現を除いてすべて無限次元である．

（ロ）$SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現は，次の四つの系列からなる（恒等表現を除外する）．

(a) 連続主系列——これは，$\ell = 1/2 + i\nu$ というインデックス（スピンと呼ぶことにしましょう）で特徴づけられる2種類の系列からなる．ν の動く範囲については後述します．

(b) 離散系列——$\ell = m/2$（m は2以上の正整数をわたる）というスピンをもつ2種類の系列がある．

(c)　補系列——$1/2 < \ell < 1$ というスピンをもつ．これは1種類．

(d)　離散系列の極限——$\ell = 1/2$ というスピンをもち，2種類ある．

この4系列のうち，(a) と (b) を合わせて主系列と呼びます．なぜそのように特別視するのかというと，$SU(1,1)$ の上で反転公式を作る際に必要とされるユニタリ表現だからです．フォック-メーラーの公式はこの反転公式の特別なケースに相当しています．

以上が，フォック-メーラーの公式に対する幾何学的説明です．

ところで，これらの既約表現を実際に構成してみせるのは大変なことです．また，既約表現がこれで尽くされることを示すのも難しい．興味のある人は次の文献で勉強してください．

(イ)　ユニタリ表現入門（上・下），杉浦光夫，上智大学数学講究録12，13.

(ロ)　等質空間上の解析学，岡本清郷，紀伊国屋数学叢書19.

どちらも読んでおいて損のない名著です．

群の表現を構成するのは確かに「大道具」が必要で難しいのですが，リー環の表現を作るのはそんなに難しくありません．ちょっと，やってみましょう．

2°　リー環 $su(1,1)$ のユニタリ表現

これからお話しする部分は，この報告のなかでいちばん数学らしい箇所です．数式がいろいろ出てきますが，しょせん2行2列の行列の計算ですから大したことはありません．

リー群 $SU(1,1)$ のリー環 $su(1,1)$ を考えたいのですが，そのために行列 g が $SU(1,1)$ に属することは次の条件でいい換えられることに注意してください．

$$g^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(g) = 1 \tag{2.1}$$

幾何学的には，リー環はリー群上の左不変ベクトル場の全体であると説明されます．しかし，私たちがいま問題としている $SU(1,1)$ のような線形リー群（それを G としておきます）では，対応するリー環（それを $\mathrm{Lie}(G)$ と書きましょう）は

$$\exp(tX) \in G \tag{2.2}$$

がすべての実数 t で成立するような行列の全体と思ってよいのです.

(2.1) に注意すれば, リー環 $su(1,1) = \mathrm{Lie}(SU(1,1))$ は

$$X^*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = O, \qquad \mathrm{tr}(X) = 0 \tag{2.3}$$

をみたす行列全体ということになります.

ところで, $SU(1,1)$ には二人の兄弟がいます. 実2次特殊線形群 $SL(2, \boldsymbol{R})$, 2次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ のことです. 親にあたるのが複素2次特殊線形群 $SL(2, \boldsymbol{C})$. 子供たちは親の「実形」と呼ばれています. (「特殊」とは「行列式＝1」を意味します.)

$SL(2, \boldsymbol{R})$ は $SU(1,1)$ と

$$SU(1,1) = \gamma SL(2, \boldsymbol{R}) \gamma^{-1}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

という関係で結ばれているので, 彼らは双子の兄弟です. $SL(2, \boldsymbol{R})$ は非コンパクトであるばかりでなく, そのユニタリ表現も $SU(1,1)$ と同じように分類されます.

$SU(2)$ は

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2.5}$$

をみたす行列が作る群ですが, 位相的には3次元球面と同相ですからコンパクト. ずいぶんと性質が異なります. 既約ユニタリ表現はすべて有限次元でスピン $\ell = m/2$ (m は 0 以上の整数をわたる) で分類されます.

さて,「実形」の意味をリー環のレベルで探ることにしましょう.

$SL(2, \boldsymbol{C})$ のリー環 $sl(2, \boldsymbol{C})$ は三つの行列

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

で張られる複素3次元のベクトル空間です. これを $sl(2, \boldsymbol{C})$ のシュバレー基底といいます. 基本関係式は

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \tag{2.7}$$

でした．(「いやしくも表現論をやる人間はこれを忘れてはならない」というぐらい「基本的」です．)　リー環 $su(1,1)$ や $su(2) = \mathrm{Lie}(SU(2))$，$sl(2, \boldsymbol{R}) = \mathrm{Lie}(SL(2, \boldsymbol{R}))$ は，$sl(2, \boldsymbol{C})$ に＊構造を導入することで作ることができます．(エルミート共役を表す星印と少々紛らわしいけれど注意して使うことにしましょう．)　これは，

$$* : sl(2, \boldsymbol{C}) \to sl(2, \boldsymbol{C}) \tag{2.8}$$

なる写像であって，共役線形，かつリー環の逆自己同型，かつ $*^2$ = 恒等写像をみたすもののことです．リー環の実形は＊構造をうまく選ぶことにより，

$$\{X \in sl(2, \boldsymbol{C})\ ;\ *(X) = -X\} \tag{2.9}$$

という形に表すことができます．それぞれの実形の＊構造を求めると，次のようになります．

$su(2)$ の場合 (エルミート共役).

$$*(X) = X^* \tag{2.10 a}$$

$su(1,1)$ の場合 ((2.3) 式に注意).

$$*(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10 b}$$

$sl(2, \boldsymbol{R})$ の場合 ($sl(2, \boldsymbol{R})$ は $sl(2, \boldsymbol{C})$ に属する実行列の全体).

$$*(X) = -\overline{X} \tag{2.10 c}$$

ここで，(2.4) が成立していることより，$su(1,1)$ と $sl(2, \boldsymbol{R})$ は群と同じく同型になることに注意しましょう．

結局，リー環の実形を考えることは，

$$(sl(2, \boldsymbol{C}),\ *\text{構造})$$

という組を考えることと同義です．そして，実形のユニタリ表現 (ρ, V) を次のように定義しましょう．

(イ)　$\rho : sl(2, \boldsymbol{C}) \to gl(V)$ (リー環の準同型) であって，

(ロ)　V 上の正定値エルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が存在して，

$$\langle \rho(X)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \rho(*(X))\eta \rangle \qquad \xi, \eta \in V$$

が成立する．

なぜこうしたまわりくどい定義を採用するのか，その理由は量子群のユニタリ表現を解説するときに明らかにされます．

以上で準備が整いました．$su(1,1) = (sl(2,C)$, (2.10 b) の＊構造）の既約ユニタリ表現を作りましょう．ユニタリ表現 (ρ, V) において，

$$V = \oplus C\xi_j$$

と基底をとっておきます．添え字 j はある集合 I（これは整数か半整数からなる集合とします）をわたり，しかも，V 上の正定値エルミート内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ について，これらは直交しているとします．さらに，シュバレー基底がこの基底ベクトルの上に，

$$\begin{aligned} \rho(h)\xi_j &= -2j\xi_j \\ \rho(e)\xi_j &= (\ell-j)\xi_{j-1} \\ \rho(f)\xi_j &= (\ell+j)\xi_{j+1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

というふうに作用しているとします．このような条件の範囲内で既約ユニタリ表現を探しましょう．まず，(2.11) の定義が基本関係式 (2.7) とつじつまが合っていることは容易に確認されます．つまり，ρ はリー環の準同型です．次にユニタリ性をもたせないといけない．(2.10 b) の＊構造の下では，$*(e) = -f$, $*(f) = -e$ となっています．そこで内積から決まるノルムを計算することで，

$$\begin{aligned} \|\rho(e)\xi_j\|^2 &= -(\ell-j)(\ell+j-1)\|\xi_j\|^2 \\ \|\rho(f)\xi_j\|^2 &= -(\ell+j)(\ell-j-1)\|\xi_j\|^2 \end{aligned}$$

が (2.11) から導かれます．内積の正定値性はこれらの量が非負であることを要求します．このことと表現の既約性からスピン ℓ と添え字集合 I が決定されます．

結果をまとめると，次の既約ユニタリ表現の存在がわかります．

(a)　$\ell = 1/2 + i\nu$

$I = Z$, $\nu \geqq 0$ または $I = Z + 1/2$, $\nu > 0$.

(b)　$\ell = m/2$（m は 2 以上の整数をわたる）

$I = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \cdots\}$ または $I = \{-\ell, -\ell-1, -\ell-2, \cdots\}$.

(c)　$1/2 < \ell < 1$, $I = \mathbf{Z}$.

(d)　$\ell = 1/2$, $I = \{1/2, 3/2, \cdots\}$ または $I = \{-1/2, -3/2, \cdots\}$.

ここで示した表現は，1° 節でお見せした $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の微分表現になっています．微分表現とは，P を群のユニタリ表現としたとき

$$\frac{d}{dt} P(e^{tX})\Big|_{t=0} \tag{2.12}$$

で与えられるリー環の表現のことです．さて，フォック-メーラーの公式が $SU(1,1)$ のユニタリ表現からどのように導かれるのか，そのアウトラインをお話ししましょう．

まず，P を $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現とします．$P(g)$（$g \in SU(1,1)$）は表現空間 V の上のユニタリ変換ですが，これは V の基底 $\{\xi_i\}$ を定めれば無限サイズの行列と見ることができます．そのとき，行列の各成分を「表現の行列要素」と呼ぶことにします．さて，この行列要素は具体的な関数として計算することができます．そのためには，$SU(1,1)$ に座標を導入する必要があるのですが，いま座標として自然なアフィン座標

$$\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

をとりましょう．一方，カシミール作用素と呼ばれる特別な元が存在します．これはリー環の基底の 2 次式です．幾何学的に説明すれば，リー群上のラプラシアンを与えるものです．そして，既約ユニタリ表現の行列要素は，このラプラシアンの固有関数になるのです．

こうした状況をアフィン座標で書くと，そこに超幾何微分方程式が出てきます．つまり，行列要素は超幾何関数

$$F(a, b, c : \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} \zeta^n \tag{2.14}$$

を用いて表すことができるのです．変数 ζ はアフィン座標と

$$\zeta = -uv \tag{2.15}$$

という関係で結ばれています．ここにおいて重要なのは，行列要素を決定する

プロセスが微分表現だけで記述されるということです．この事実は量子群の考察において決定的な意味をもちます．

さて，$SU(1,1)$ の部分群 K を

$$K = \left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix};\ 0 \leqq \theta < 4\pi\right\} \tag{2.16}$$

としましょう．K の作用について両側不変であるような関数は，ζ だけの関数になります．また，両側 K-不変な行列要素は，連続主系列 (a)，補系列 (c) の中に登場し，しかも変数 ζ に関するルジャンドル微分方程式をみたします．

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right\} = -\ell(\ell+1)\varphi \tag{2.17}$$

これはスツルム - リュウヴィル型作用素です．そして，この作用素に対する展開定理を求めることは可能です．それは，幾何学的に言えば，両側 K-不変な $SU(1,1)$ 上の関数に対する展開定理であり，それがフォック - メーラーの公式に他ならないのです．なお，展開定理に補系列は関与しません．

これでフォック - メーラーの公式が $SU(1,1)$ のユニタリ表現の立場から説明されたわけですが，ここで採用した説明の仕方に「古風」な印象を受けられる方が大勢いると思います．1° 節であげた参考書はこうした流儀を採っていません．非コンパクト・リー群のユニタリ表現は1940年代の後半，バーグマンやゲルファント - ナイマルクといった人たちにより始められました．彼らは，$SU(1,1)$ やローレンツ群 $SL(2,C)$ のユニタリ表現を研究したのです．ここで採ったのは，実は，バーグマンが展開した論法です．ですから，「古風」なのも宜(むべ)なるかなですが，私たちは「先祖返り」をする必要があったのです．その必要性は，量子群 $SU_q(1,1)$ を攻略するために生じたのです．

3° 量子群 $SU_q(1,1)$ のユニタリ表現

最初に述べたように，私たちは $SU_q(1,1)$ を捉えきっていません．しかし，「つかまえた」ことを保証する客観的規準とは一体なんでしょうか．

話をリー群に戻しましょう．線形リー群のような具体的な群ですと，定義そのものがきちんとした条件式で書かれているので，それを見ただけでその群を理解したような気分になります．しかし，それが真の理解から程遠いものであることは，表現論を学んだ人ならばわかるでしょう．

リー群を「つかまえる」とは，結局，次の三つのことを実行することが最低条件と言えるのではないでしょうか．

（イ）既約ユニタリ表現を分類する．

（ロ）Plancherel の公式，つまりリー群上の展開定理を証明する．

（ハ）表現のテンソル積を分解する．

もう少し詳しく説明しましょう．まず，（イ）ですが，ユニタリ表現の分類を通して，リー群（それを G としておきます）の関数環 $A(G)$ の基底が行列要素となってあぶり出されてきます．次に（ロ）ですが，これは（イ）であぶり出されたものが確かに基底になっていることを保証する作業です．最後に（ハ）ですが，これはいくつかの行列要素を掛け合わせて作られる関数の展開を決定する作業です．つまり，関数環の代数構造の探究です．

こうした手続きを実行することで，私たちはリー群の実像に迫ることができるのです．

この哲学に従えば，「$SU_q(1,1)$ をつかまえた」と宣言するには，この三つの作業を経る必要があります．つまり，この三つのステップを首尾一貫して実行できるような理論的枠組みを構築しなければいけません．

現在のところ，私たちは「勝利宣言」を出すには至っていませんが，かなりイイ線までいっています．（イ）と（ロ）についてはなんとか OK という段階にいるのです．それをこれから話します．

まず（イ）のユニタリ表現の分類ですが，私たちは $SU_q(1,1)$ そのものを持っているわけではありませんから，議論の出発点とすべきは量子展開環 $U_q(sl(2,C))$ の表現です．リー環のときと同様に，これの実形を考えましょう．

量子展開環 $U_q(sl(2,C))$ はシュバレー基底 k, k^{-1}, e, f で生成される代数で，

$$k \cdot k^{-1} = k^{-1} \cdot k = 1$$
$$kek^{-1} = qe, \qquad kfk^{-1} = q^{-1}f \tag{3.1}$$
$$[e, f] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}}$$

を基本関係式とします．q は複素パラメーターです．量子展開環の実形は＊構造を決めることで指定します．この考え方は 2° 節と同じです．

実形の分類については，次の結果を得ています．

$U_q(sl(2, \boldsymbol{C}))$ の実形は同型を除いて，次の三つのものに限る．

$U_q(su(2))$　$-1 < q < 1$ であり，

$$*(k) = k, \qquad *(e) = f, \qquad *(f) = e \tag{3.2 a}$$

$U_q(su(1,1))$　$-1 < q < 1$ であり，

$$*(k) = k, \qquad *(e) = -f, \qquad *(f) = -e \tag{3.2 b}$$

$U_q(sl(2, \boldsymbol{R}))$　$|q| = 1$ であり，

$$*(k) = k, \qquad *(e) = -e, \qquad *(f) = -f \tag{3.2 c}$$

これらの実形は古典極限 $q \to 1$ において，もちろん，それぞれのリー環の実形に一致します．ここで注意してほしいのは，量子化された世界では，リー環と異なり，$U_q(su(1,1))$ と $U_q(sl(2, \boldsymbol{R}))$ は決して同型にならないということです．そもそもパラメーター q に関する条件が違います．これが量子世界で遭遇する**第一の相違点**です．

さて，$0 < q < 1$ として，$U_q(su(1,1))$ のユニタリ表現 (ρ, V) を考察しましょう．ユニタリ性の定義は 2° 節でしたものと同じです．表現空間 V には，これまた 2° 節と同じように基底 $\{\xi_j\}$ がとれているとしておきます．この基底の上に，シュバレー基底が次のように作用するとします．

$$\rho(k)\xi_j = q^{-j}\xi_j$$
$$\rho(e)\xi_j = q^{3/2-1}[\ell - j]_{q^2}\xi_{j-1} \tag{3.3}$$
$$\rho(f)\xi_j = q^{3/2-1}[\ell + j]_{q^2}\xi_{j+1}$$

ただし，$[a]_q = \dfrac{1-q^a}{1-q}$ です．

2° 節でやったように，この範囲で既約ユニタリ表現を分類します．その結果

は,

(a)　連続系列　$\ell = 1/2 + i\nu$

$$0 \leqq \nu \leqq \pi/2h,\ I = Z \ \text{または}\ 0 < \nu \leqq \pi/2h,\ I = Z + 1/2.$$

(b)　離散系列　$\ell = m/2$（m は 2 以上の整数をわたる）

$$I = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \cdots\} \ \text{または}\ I = \{-\ell, -\ell-1, -\ell-2, \cdots\}.$$

(c)　補系列　$1/2 < \ell < 1,\ I = Z.$

(d)　離散系列の極限　$\ell = 1/2$

$$I = \{1/2, 3/2, \cdots\} \ \text{または}\ I = \{-1/2, -3/2, \cdots\}.$$

(e)　第二連続系列　$\ell = 1/2 + i(\pi/2h + it),\ t > 0,$

$$I = Z \ \text{または}\ I = Z + 1/2.$$

h は $q = e^{-h}$ で決まる実数です.

リー群のときと同じような分類ですが，いくつか注意すべきことがあります．まず（a）の連続系列ですが，ν の動く範囲は有限の区間です．しかし，古典極限では $h \to 0$ ですから，結局，リー群の連続主系列が回復します．驚くべきことは，第二連続系列という，古典論では存在しない表現系列の出現です．スピン ℓ の条件を見ればわかるように，この系列は古典極限をとると消失してしまいます.

これが古典論と量子論の **第二の相違点** です．（この第二連続系列がどのような役割を演じるのか，それについては後でふれます．楽しみにしていてください．）

これでユニタリ表現が分類できたのですから，次は行列要素の決定です．そのために，再びアフィン座標

$$\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

を導入しましょう．ただし，量子群の世界では，これらは可換な量ではありません．次の基本関係式をみたすことが要請されます.

$$\begin{aligned} &qxu = ux, \quad qxv = vx, \quad qvy = yv, \quad quy = yu \\ &uv = vu, \quad xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

この要請は量子展開環の作用から自然に定まるものです．これらの関係式を

みたす x, u, v, y から生成される「座標環」$A_q(SU(1,1))$ が当面の舞台です．この上で，量子展開環のカシミール作用素が，各ユニタリ表現の行列要素に対してどのように振る舞うのか，それを求めることは可能です．このプロセスはリー群のときと同じように進みます．しかし，結果は異なります．量子群の表現の行列要素はベーシック超幾何関数

$$ {}_2\varphi_1(a, b, c : q : \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a:q)_n (b:q)_n}{(q:q)_n (c:q)_n} \zeta^n \tag{3.6} $$

$$ \text{ただし，} (a:q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) $$

を用いて書かれるのです．変数 ζ は

$$ \zeta = -q^{-1}uv \tag{3.7} $$

と定義されます．

さて，$SU(1,1)$ の部分群 K（2° 節を参照）の役割を，今度は，k と k^{-1} で生成される部分代数が担います（これも K としましょう）．この部分代数 K の作用に関して両側不変な $A_q(SU(1,1))$ の元は ζ の関数です．そして，行列要素の中でこの両側 K-不変なものは，連続系列（a），補系列（c），第二連続系列（e）において現れ，ベーシック超幾何関数を用いて

$$ \varphi(\alpha;\zeta) = {}_2\varphi_1(q\alpha, q\alpha^{-1}, q^2 : q^2 : q^2\zeta) \tag{3.8} $$

と書かれています．そして，次の q-差分作用素の固有関数となります．

$$ \begin{gathered} T_{q^2}^{-1} D_{q^2} \zeta(1-q^2\zeta) D_{q^2} \varphi(\alpha;\zeta) = \lambda(\alpha)\varphi(\alpha;\zeta) \\ \text{ただし，} \lambda(\alpha) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}(1+q^2-(\alpha+\alpha^{-1})q) \end{gathered} \tag{3.9} $$

T_q は q シフト作用素，D_q は q-微分作用素です．

これが 2° 節のルジャンドル微分方程式に相当するものです．したがって，この差分作用素に対する展開定理，すなわち，フォック-メーラーの公式の q-類似を作れば，それで Plancherel の公式が特別な場合に証明されたことになります．こうして私たちは（ロ）の段階に進みます．

(3.9) に適当な境界条件を課し，そのスペクトル問題を考えるのですが，そのとき，q-差分から本当の差分問題に移行する必要があります．この場合は，

$$\zeta = -q^{2n}, \qquad n \in \boldsymbol{Z} \tag{3.10}$$

という点の上だけで（3.9）を考察するのです．その結果，フォック-メーラーの公式の q-類似として得られた公式は次のものです．

（3.8）の $\varphi(\alpha;\zeta)$ について，$\varphi_n(\zeta)=\varphi(-q^{2n+1};\zeta)$，$\varphi_\theta(\zeta)=\varphi(e^{i\theta};\zeta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおきます．このとき（3.10）の点の上で，

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \int_0^\pi c(\theta)\varphi_\theta(\zeta)\,d\theta \int_{-\infty}^0 \varphi_\theta(\eta) f(\eta)\,d_{q^2}\eta \\ &\quad + \sum_{n=0}^\infty [2n+1]_q \varphi_n(\zeta) \int_{-\infty}^0 \varphi_n(\eta) f(\eta)\,d_{q^2}\eta \end{aligned} \tag{3.11}$$

が成立する．ここで，$\int \cdot\, d_q\eta$ はジャクソン積分，また

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{1-q^2}\left[\frac{(q^4:q^4)_\infty}{(q^2:q^4)_\infty}\right]^2 \frac{(e^{2i\theta}:q^4)_\infty (e^{-2i\theta}:q^4)_\infty}{(e^{2i\theta}q^2:q^4)_\infty (e^{-2i\theta}q^2:q^4)_\infty} \\ [a]_q &= \frac{q^a-q^{-a}}{q-q^{-1}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

である．

これを 1° 節のフォック-メーラーの公式と比べると，（3.11）の第1項は似ているが，第2項の無限和はフォック-メーラーにはない．実は，この無限和は第二連続系列からの寄与なのです．（第1項は連続系列からの寄与です．）つまり，

$$\ell = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\pi}{2h} + (2n+1)i\right) \tag{3.13}$$

という特別な値における第二連続系列が関与してくるのです．より明確に言えば，φ_θ は連続系列の両側 K-不変な行列要素であり，φ_n は上の値における第二連続系列の両側 K-不変な行列要素です．

（3.13）の系列を「ストレンジ系列」と呼びましょう．

いま，私たちは両側 K-不変な関数に対する展開定理を得たわけですが，これをさらに一般化し，Plancherel の公式を示すこともできます（これは筑波大学の筧知之さんが最近示されたものです）．ここにおいて，$SU_q(1,1)$ のユニタリ表現の主系列が

(a) 連続（主）系列

(b) 離散系列

(c) ストレンジ系列

となることが確認できたのです．ストレンジ系列という古典論には存在しえない系列！ これが，量子群とリー群の **第三の相違点** であり，私たちの発見の中で最も重要なものなのです．

以上が，量子群 $SU_q(1,1)$ の研究の現状です．私たちには（ハ）の表現のテンソル積の分解という難題が残されています．離散系列どうしのテンソル積の分解が部分的には解決されているのですが（これは北海道大学の澁川陽一さんの仕事です），本質的な箇所は未だ手がつけられない状態です．この節のはじめに，「我々はイイ線まできている」と言いましたが，残されている課題も多く，解決への途が険しいというのも事実です．また，$SU_q(1,1)$ 以外の「非コンパクト型」量子群のユニタリ表現論は皆目見当がつかないと言わざるをえません．量子群という枠組みが非可換幾何学の素材として真に研究に値するものなのかどうか（私はそうであることを信じます），結論を下すにはより多くの研究が積み重ねられる必要があります．そして，「非コンパクト型」量子群の研究は，まさにその点において，深い意義をもつのだと思います．

さて，最後になりましたが，この報告の成立についてコメントしておきたいと思います．この報告はご覧のように私ひとりが書いたものです．したがって，文責は私個人にありますが，この報告を書くにあたっては，実に多くの方たちとの共同研究がそのベースになっています．（イ）の部分は，増田哲也さん，三町勝久さん，中神祥臣先生，野海正俊さん，佐分利豊さんたちとの共同研究がベースになっていますし，また，（ロ）の部分は，筧知之さん，増田哲也さんとの共同研究がベースになっています．共同研究中はこれらの方から実に多くのことを学びました．そういう諸々が肥やしとなって，この報告を書くことができたのです．その意味で，この報告をこれらの共同研究者の方たちと分かち合いたいと思います．

第8話

量子群 $SU_q(2)$ と q 解析

野海正俊

表題の量子群 (quantum group) は，1980年代に発見された新しい数学的対象である．量子群の発見には Faddeev の数理物理の学派，Drinfeld (1990年の京都での国際数学者会議でフィールズ賞を受賞した)，神保道夫，Woronowicz といった多くの人々が関与している．量子群は本来，統計物理において対称性を記述する代数構造としての役割を有しているが，表現論はもとより，特殊関数論，低次元トポロジーや共形場理論といった広範な領域と深い結びつきをもち，量子群に関連した種々の問題が，現在もなお数多くの人々によって研究されている．

1987年から1988年にかけて，量子群の最も基本的な例である $SU_q(2)$ について，その既約ユニタリ表現の行列要素がヤコビ多項式の一つの q アナローグである little q ヤコビ多項式によって表されることが発見された．一方では，$SU_q(2)$ の既約ユニタリ表現のテンソル積の分解を記述するクレブシュ-ゴルダン (Clebsch-Gordan) 係数が，ハーン (Hahn) 多項式の q アナローグである q ハーン多項式で与えられることが発見された．この little q ヤコビ多項式，q ハーン多項式はいずれも q 超幾何級数で表される直交多項式系の代表的なものである．量子群が，リー環の普遍包絡環やリー群の関数環をホップ (Hopf) 代数の範疇で q 変形したものであることを思えば，表現の行列要素やクレブシュ-ゴルダン係数に現れる直交多項式が q 変形を受けたとしても，なんの不思議もないかもしれない．しかし，前世紀にさかのぼる q 超幾何関数の歴史と，まだ生まれて間もない量子群とを比較すると，両者の結びつきには感嘆すべきものがあった．実際，q 超幾何関数の誕生から1世紀以上の年月を経て初めて，その内部に潜んでいた対称性を記述する代数構造が明らかになったのである．

これを契機として，量子群と q 特殊関数との結びつきが認識されるようになった．その後の発展の方向の一つは，$SU_q(2)$ の表現の行列要素と little q ヤコビ多項式の結びつきを，量子群対称性をもつ球関数の理論として普遍化することである．現在までに，アスキー-ウィルソン（Askey-Wilson）多項式と呼ばれる q ヤコビ多項式の一族や，マクドナルド（Macdonald）多項式と呼ばれる多変数の q 直交多項式系が量子等質空間の球関数として実現されることが明らかになってきている．また最近では，いわゆる q-KZ 方程式や q 差分作用素の可換な族などの観点からの研究も行なわれていて，量子群と q 特殊関数の結びつきは，新しい展開を見せ始めている．

以下では，非可換性と q アナローグの繋がりに焦点を当てつつ，量子群 $SU_q(2)$ から表現の行列要素として little q ヤコビ多項式が現れる仕組みについて解説を試みる．なお，$SU_q(2)$ のユニタリ表現の行列要素が little q ヤコビ多項式によって記述されるという事実は，旧ソ連の Soibelman-Vaksman，オランダの Koornwinder，日本の増田・三町・中神・野海・上野の5人のグループの，三者によってほぼ同じころ，独立に発見されたものである．（量子群 $SU_q(2)$ の定義にはいろいろな流儀があるので，文献を見る場合には注意が必要である．）

1° 非可換性と q アナローグ

本題にはいる前に，非可換性がどのように q の世界と結びつくのか簡単な例で見ておこう．いま二つの文字 z, w で生成され，基本関係「$wz = qzw$」で決まる C 代数 $\mathcal{R}$ を考えよう．これを簡単に $\mathcal{R} = C[z, w\,;\, wz = qzw]$ と記すことにしよう．$\mathcal{R}$ が $z^a w^b$ $(a, b \in N = \{0, 1, 2, \cdots\})$ の形の単項式を C 基底にもつことは容易にわかる．この代数の中での二項係数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ を次で定義しよう：

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q z^k w^{n-k}. \tag{1.1}$$

たとえば，$(z+w)^2$ の場合

$$(z+w)(z+w) = z^2 + zw + wz + w^2 = z^2 + (1+q)zw + w^2 \qquad (1.2)$$

から $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1+q$ となる．$(z+w)^{n+1} = (z+w)(z+w)^n = (z+w)^n(z+w)$ を展開して係数比較すれば，この二項係数は，次の漸化式をもつことがわかる．

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \qquad (1.3)$$

これは，二項係数をいわゆるパスカルの三角形を用いて計算するときの漸化式に対応するものである．この漸化式から容易に $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ が非負整数を係数とする q の多項式となることがわかる．そこで

$$\begin{aligned} [n]_q &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \\ [n]_q! &= [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q \end{aligned} \qquad (1.4)$$

とおくと，上の漸化式から帰納的に

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1-q^{n-i}}{1-q^{k-i}} \qquad (1.5)$$

となることが示せる．このように，自然数 n を q の式 $[n]_q$ におき換えて得られるような対象は通常 **q アナローグ** と呼ばれている．$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ は **ガウスの q 二項係数** とも呼ばれ，二項係数 $\binom{n}{k}$ の q アナローグとして古くから知られているものである．q アナローグを扱う際には，q 階乗関数の記号

$$(x;q)_k = (1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{k-1}) \qquad (k \in N) \qquad (1.6)$$

がよく用いられる．これを用いて表せば，ガウスの q 二項係数は

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n;q^{-1})_k}{(q;q)_k} = (-1)^k q^{nk-k(k-1)/2} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} \qquad (1.7)$$

となる．$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ は，有限体 F_q 上のグラスマン多様体の点の個数であったり，$k \times (n-k)$ の長方形の中に含まれるヤング図形の個数の母関数であったり，いろいろな意味をもつ．

C 代数 $\mathcal{R}$ に w^{-1} を添加した代数 $\mathcal{R}[w^{-1}]$ を考え，その中で

$$\begin{aligned}(z+w)^n &= (w+z)(w+z)\cdots(w+z)\\ &= (1+zw^{-1})w(1+zw^{-1})w\cdots(1+zw^{-1})w\\ &= (1+zw^{-1})(1+qzw^{-1})\cdots(1+q^{n-1}zw^{-1})w^n \qquad (1.8)\end{aligned}$$

と書くと，$(z+w)^n=(-zw^{-1};q)_n w^n$ を得る．これを (1.1) と比較して $x=-zw^{-1}$ と読み替えれば，

$$(x;q)_n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} x^k \qquad (1.9)$$

なる q 階乗関数の展開公式を得る．よく知られた公式であるが，これは非可換環 $\mathcal{R}$ の中の二項展開の公式 (1.1) の可換な「影」と思える．また上の定義 (1.1) で $(z+w)^{m+n}=(z+w)^m(z+w)^n$ を2通りに展開して係数比較を行なうと，

$$\sum_{i+j=k}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{(m-i)j} = \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q \qquad (1.10)$$

なる公式が得られる．これはいわゆる Chu-Vandermonde の公式の q アナローグである．

大まかにいえば，量子群と q 特殊関数の関係はこの非可換性「$wz=qzw$」と q 二項係数の関係である．階乗関数や二項係数が，非可換性により q 階乗関数や q 二項係数に変形されるのと同じメカニズムによって，超幾何級数が q 超幾何級数に変形されるのである．

q 超幾何級数 ${}_{m+1}\phi_m$ は次のように定義される．$q\in \boldsymbol{C}$，$0<|q|<1$ として，

$$ {}_{m+1}\phi_m\left(\begin{matrix} a_0, a_1, \cdots, a_m \\ b_1, \cdots, b_m \end{matrix}; q, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_0;q)_k(a_1;q)_k\cdots(a_m;q)_k}{(q;q)_k(b_1;q)_k\cdots(b_m;q)_k}x^k. \qquad (1.11)$$

$a_i=q^{\alpha_i}$ $(0\le i\le m)$，$b_j=q^{\beta_j}$ $(1\le j\le m)$ とすれば，${}_{m+1}\phi_m$ は，$q\to 1$ なる極限で通常の超幾何級数

$$ {}_{m+1}F_m\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \\ \beta_1, \cdots, \beta_m \end{matrix}; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_m)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_m)_k}x^k \qquad (1.12)$$

に対応する．ここで $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$．とくに $m=1$ の場合の ${}_2\phi_1$ がガウスの超幾何級数の q アナローグにあたる．上で述べた q 二項定理 (1.9)，

q-Chu-Vandermonde の公式（1.10）は，q 超幾何級数に関する公式として次のように一般化される：

$$ {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} a \\ \cdot \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \qquad (|x|<1) \tag{1.13}$$

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; q, \frac{c}{ab}\right) = \frac{(c/a;q)_\infty(c/b;q)_\infty}{(c/ab;q)_\infty(c;q)_\infty} \qquad \left(\left|\frac{c}{ab}\right|<1\right). \tag{1.14}$$

ここで，$(x;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-xq^k)$．これらはそれぞれ，$(1-x)^{-a}$ の二項展開の公式，ガウスの和公式の q アナローグを与える．このように q 超幾何級数は，組合せ論的な等式にコンパクトな表式を与える役割ももっている．

定義（1.11）で a_i のいずれかが q^{-N} $(N\in \boldsymbol{N})$ の形のときには，この級数は有限項で切れる．後で現れるヤコビ多項式の q アナローグは，このような有限項の q 超幾何級数で表される種類のものである．

2° 量子群 $SL_q(2;\boldsymbol{C})$ とそのコンパクトな実形 $SU_q(2)$

量子群とはどういうものか，簡単に説明しよう．G を $\boldsymbol{C}$ 上の線型代数群とし G の座標環を $A(G)$ で表せば，$\mathcal{A}=A(G)$ は次のようなホップ代数の構造をもつ．$\varphi\in\mathcal{A}$ に対して「余積（coproduct）」$\Delta(\varphi)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\simeq A(G\times G)$ を

$$\Delta(\varphi)(x,y) = \varphi(xy) \qquad (x,y\in G) \tag{2.1}$$

で定めると，$\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ は代数の準同型で「余結合律」$(\Delta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$ をみたす．（以下 $\otimes$ は係数体上のテンソル積 $\otimes_C$ を表すものとする．）また単位元 $e\in G$ での値をとる操作から「余単位写像（counit）」$\varepsilon:\mathcal{A}\to\boldsymbol{C}$，逆元をとる操作から「対蹠写像（antipode）」$S:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ が定まる：

$$\varepsilon(\varphi) = \varphi(e), \qquad S(\varphi)(x) = \varphi(x^{-1}) \quad (x\in G). \tag{2.2}$$

すべての公理を掲げることはしないが，ホップ代数は組 $(\mathcal{A},\Delta,\varepsilon,S)$ を公理化して得られる代数系である．（一般に余単位写像は代数の準同型，対蹠写像は反準

同型となる.）この $\mathscr{A}=A(G)$ の場合，G の多様体としての構造は可換な代数 $\mathscr{A}$ から, G の群としての構造は Δ, ε, S から再構成することができるので，ホップ代数 $\mathscr{A}=A(G)$ が G のすべての情報を含んでいると考えてよい.

上のやり方で得られるホップ代数は代数としては可換である．これに対して，非可換なホップ代数もなにか群のような幾何学的な対象を表しているものと積極的に考えようというのが「量子群」の考え方である．量子群の議論では（非可換かつ非余可換な）ホップ代数であって，群の座標環 $A(G)$ の変形とみなせるようなものを考察するが，それを座標環にもつような仮想的な幾何学的対象を想定して,「量子群」と呼ぶわけである.

以下 q は 0 でない複素数で，1 のベキ根ではないと仮定して，2 次の特殊線形群

$$SL(2;C) = \left\{g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a, b, c, d \in C,\ ad-bc=1\right\} \tag{2.3}$$

の q 変形である量子群“$SL_q(2;C)$”を導入する.

天下りだが，4 個の文字 x, u, v, y を生成元とし，次の基本関係で定まる C 代数を $A_q(SL(2;C))$ と記す：

$$\begin{aligned} qxu &= ux, \quad qvx = xv, \quad quy = yu, \quad qvy = yv \\ uv &= vu, \quad xy-q^{-1}uv = yx-quv = 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

4 個の生成元を $\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}$ と配置して，x, u, v, y をそれぞれ $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ から a, b, c, d を取り出す座標関数に対応するものと考える．($q=1$ のときは，生成元の可換性と $xy-uv=1$ で $SL(2;C)$ の座標環 $A(SL(2;C))$ となる.）この非可換な代数 $A_q(SL(2;C))$ は，ホップ代数の構造をもち，余積写像 Δ は次の生成元での値によって決まる.

$$\begin{pmatrix} \Delta(x) & \Delta(u) \\ \Delta(v) & \Delta(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

ただし，これは $\Delta(x)=x\otimes x+u\otimes v$, $\Delta(u)=x\otimes u+u\otimes y$, $\cdots$ の略記法で，右辺の $\dot{\otimes}$ は行列の積であって，成分の積は $\otimes$ でとることを表す．この余積写像が,

行列の積に対応していることは見やすい．余単位写像 ε は

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(x) & \varepsilon(u) \\ \varepsilon(v) & \varepsilon(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

なる $A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ の準同型，対蹠写像 S は

$$\begin{pmatrix} S(x) & S(u) \\ S(v) & S(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -qu \\ -q^{-1}v & x \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

なる反準同型である．これは逆行列の公式に対応している．対蹠写像の自乗 S^2 はホップ代数としての自己同型であるが，容易に確かめられるように，この場合は恒等写像からのずれが生じている．これは非可換なホップ代数に特有な現象であって，S^2 は可換ホップ代数からのずれを測る指標の役割をする．

次に，$SL(2;\boldsymbol{C})$ のコンパクトな実形として，2 次のユニタリ群

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \bar{a} = d,\ \bar{b} = -c \right\} \tag{2.8}$$

の「量子群化」を考えよう．$SU(2)$ では座標の複素共役がまた座標関数で与えられることを考慮して，$A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ にも，$SU(2)$ 上での関数の複素共役に対応する $*$ 構造を導入する．q が実数ならば，$A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ の元 φ に対し φ^* を対応させる共役線型な写像で，$\boldsymbol{R}$ 代数の反準同型写像であって

$$x^* = y, \qquad u^* = -q^{-1}v, \qquad v^* = -qu, \qquad y^* = x \tag{2.9}$$

をみたすものがただ一つ存在し，しかも，任意の $\varphi \in A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ に対し $\varphi^{**} = \varphi$ が成立することが示せる．一般に $\boldsymbol{C}$ 上のホップ代数 $\mathscr{A}$ に対し，$*$ 構造（共役線型な $\boldsymbol{R}$ 代数の逆準同型で，対合的なもの）が与えられ，余積写像，余単位写像が $*$ 準同型となるとき，組 $(\mathscr{A}, *)$ をホップ $*$ 代数という．$A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ は，上のようにして定めた $*$ 構造によりホップ $*$ 代数となる．このホップ $*$ 代数 $(A_q(SL(2;\boldsymbol{C})), *)$ を $A_q(SU(2))$ と書き，量子群 $SU_q(2)$ の座標環を指定するものと考えるのである．

3° 量子群 $SU_q(2)$ のユニタリ表現とその行列要素

線型代数群 G に対し，その座標環の q 変形であるようなホップ代数 $\mathcal{A}$ が与えられたとき，これを $\mathcal{A}=A_q(G)$ と書いて「量子群」G_q の座標環と表現することにしよう．このような設定では，右（ないし左）$A_q(G)$ 余加群（comodule）のことを，量子群 G_q の **表現** と称する．右 $\mathcal{A}$ 余加群とは，「余作用（coaction）」$\rho: M\to M\otimes\mathcal{A}$ をもつ $\boldsymbol{C}$ 線型空間 M で，ρ が $\mathcal{A}$ の余積，余単位写像との自然な両立条件

$$(\rho\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\circ\rho = (\mathrm{id}_M\otimes\Delta)\circ\rho, \qquad (\mathrm{id}_M\otimes\varepsilon)\circ\rho = \mathrm{id}_M \tag{3.1}$$

をみたすものをいう．いま M が $\boldsymbol{C}$ 基底 $(v_j)_j$ をもつとして，余作用 ρ を

$$\rho(v_j) = \sum_i v_i\otimes\varphi_{ij} \qquad (\varphi_{ij}\in\mathcal{A}) \tag{3.2}$$

の形に書いて行列表示する．こうして得られる行列 $\Phi=(\varphi_{ij})_{ij}$ の言葉で書けば，ρ の両立条件は

$$\Delta(\varphi_{ij}) = \sum_k \varphi_{ik}\otimes\varphi_{kj}, \qquad \varepsilon(\varphi_{ij}) = \delta_{ij} \tag{3.3}$$

となる．$\Phi=(\varphi_{ij})_{ij}$ を G_q の表現 M の基底 $(v_j)_j$ に関する表現行列，各 φ_{ij} を表現の **行列要素** という．量子群 G_q の表現を決定する問題は，座標環 $\mathcal{A}=A_q(G)$ の元を成分とする正方行列 $\Phi=(\varphi_{ij})_{ij}$ であって，条件 (3.3) をみたすものを，定数行列による相似変換による同値性の下で決定することにほかならない．

$\mathcal{A}$ がホップ＊代数のときには，余加群のユニタリ性を問題にすることができる．$\mathcal{A}$ 余加群 M が有限次元のときは，次の定義でよい．M がエルミート内積をもち，正規直交基底 $(v_j)_j$ に関する表現行列 Φ が次の意味でユニタリとなること：$\Phi^*=(\varphi_{ji}^*)_{ij}$ について $\Phi^*\Phi=\mathrm{id}$.

そこで，量子群 $SU_q(2)$ の（有限次元の）ユニタリ表現を決定する問題を考えよう．実際には「複素化」$SL_q(2;\boldsymbol{C})$ の有限次元表現を決定することと同じなのでしばらく＊構造のことは忘れて，ホップ代数 $\mathcal{A}=A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ で考えることにしよう．

$SL_q(2;C)$ の有限次元表現を決定するには，$q=1$ の場合にならって，2変数同次多項式の空間への群の作用を考えればよい．いま2次元のアフィン空間の対応物 C_q^2 を考えるために，座標環 $A_q(C^2)$ を定義しよう．$A_q(C^2)$ とは2個の生成元 z, w と交換関係 $wz=qzw$ で決まる C 代数 $\mathcal{R}=C[z,w\,;\,wz=qzw]$ (1° 節で扱ったもの）とする．$\mathcal{A}=A_q(SL(2;C))$ と $\mathcal{R}=A_q(C^2)$ に対し，代数の準同型 $\rho:\mathcal{R}\to\mathcal{R}\otimes\mathcal{A}$ で，生成元の上で

$$\rho(z)=z\otimes x+w\otimes v,\qquad \rho(w)=z\otimes u+w\otimes y \tag{3.4}$$

なる値をとるものがただ一つ存在する．しかも，これを余作用として $\mathcal{R}$ は右 $\mathcal{A}$ 余加群となる．$SL_q(2;C)$ の C_q^2 への「作用」が，右余作用 $\rho:A_q(C^2)\to A_q(C^2)\otimes A_q(SL(2;C))$ によって指定されたと考えるのである．これによって $SL_q(2;C)$ の表現 $A_q(C^2)$ が得られたことになる．

抽象的な表現ではなく，表現空間が代数構造をもち，しかもその代数構造が群作用と両立しているような対象を考察することは重要である．一般に，C 代数 $\mathcal{R}$ が $\mathcal{A}=A_q(G)$ 上の余加群の構造をもち，しかも余作用 $\rho:\mathcal{R}\to\mathcal{R}\otimes\mathcal{A}$ が代数準同型となっているとしよう．$\mathcal{R}$ によって，「量子空間」X_q で $\mathcal{R}=A_q(X)$ を座標環にもつものが指定されたと思うと，余作用が代数準同型であるという要請は X_q に量子右 G_q 空間の構造を与えるものと考えてよい．この意味で，量子平面 C_q^2 は量子右 $SL_q(2;C)$ 空間である．

$SL_q(2;C)$ の表現 $A_q(C^2)$ において，余作用 ρ が次数を保つことから，$A_q(C^2)$ は

$$A_q(C^2)=\bigoplus_{l=0}^{\infty}M_l,\qquad M_l=Cz^l\oplus Cz^{l-1}w\oplus\cdots\oplus Cw^l \tag{3.5}$$

の形に右余加群として直和分解される．この表現空間において，z, w の重みをそれぞれ $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ と勘定すると，M_l の基底のベクトル $z^l, z^{l-1}w, \cdots, w^l$ の重みはそれぞれ $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}-1$, $\cdots$, $-\frac{l}{2}$ である．最高の重みを $j=\frac{l}{2}$ と書いて，M_l をスピン j の表現と呼ぶことも多い．ここでも，$M_l=V_j$ と書き改め，各 $j\in\frac{1}{2}N$ に対して，$A_q(C^2)$ 内の $2j$ 次同次式の全体 V_j をスピン j の表現と呼ぶ．そこに現れる重みの集合を，以下では $I_j=\{j, j-1, \cdots, -j\}$ と書くことにする．（q が

1 のベキ根でなければ）各 V_j $(j\in\frac{1}{2}N)$ は既約である．また有限次元の右 $A_q(SL(2;C))$ 余加群はすべて完全可約であり，しかも既約なものはすべて，V_j $(j\in\frac{1}{2}N)$ のいずれかに同型であることが知られている．

1 次元表現 V_0 の表現行列は (1)，2 次元表現 $V_{1/2}=\boldsymbol{C}z\oplus\boldsymbol{C}w$ の表現行列は $\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}$．念のためスピン $j=1$ の 3 次元表現 $V_1=\boldsymbol{C}z^2\oplus\boldsymbol{C}zw\oplus\boldsymbol{C}w^2$ についても，対応する表現行列を書いておこう：

$$\begin{pmatrix} x^2 & xu & u^2 \\ (1+q^2)xv & xy+qvu & (1+q^2)uy \\ v^2 & vy & y^2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

たとえば第 1 列は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \rho(z^2) &= \rho(z)^2 = (z\otimes x + w\otimes v)^2 \\ &= z^2\otimes x^2 + zw\otimes xv + wz\otimes vx + w^2\otimes v^2 \\ &= z^2\otimes x^2 + (1+q^2)zw\otimes xv + w^2\otimes v^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

上の 3×3 行列の中央の行列要素 $xy+qvu$ に注目しよう．いま $\zeta=-q^{-1}uv$ と書くと $xy+qvu=1-(1+q^2)\zeta$ であって，これは，[0,1] 区間の 1 次のルジャンドル多項式 $1-2\zeta$ の一つの q アナローグとなっている．これだけからでは唐突かもしれないが，一般のスピン j の表現 V_j の行列要素は x, u, v, y の簡単な単項式とヤコビ多項式のある q アナローグの積の形に表されることがわかる．

上で定義した表現 V_j $(j\in\frac{1}{2}N)$ において，$\boldsymbol{C}$ 基底 $(e^j_m)_{m\in I_j}$ を

$$e^j_m = c^j_m z^{j+m} w^{j-m} \qquad (m\in I_j=\{j, j-1, \cdots, -j\}) \tag{3.8}$$

で定める．ここで c^j_m は 0 でない任意の定数とする．この基底に関する表現行列を，$(w^j_{mn})_{m,n\in I_j}$ で表そう：

$$\rho(e^j_n) = \sum_{m\in I_j} e^j_m\otimes w^j_{mn} \qquad (n\in I_j). \tag{3.9}$$

これらの行列要素は，little q ヤコビ多項式と呼ばれる，区間 [0,1] のヤコビ多

項式の q アナローグを用いて表される．$\alpha, \beta \in N$ のとき，**little q ヤコビ多項式** $p_k^{(\alpha,\beta)}(t;q)$ $(k \in N)$ を q 超幾何級数 ${}_2\phi_1$ によって

$$p_k^{(\alpha,\beta)}(t;q) = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-k}, q^{\alpha+\beta+k+1} \\ q^{\alpha+1} \end{matrix}; q, qt\right) \qquad (k \in N) \tag{3.10}$$

と定義する．これは t についての k 次多項式である．

定理　量子群 $SL_q(2;C)$ のスピン j の表現 V_j $(j \in \frac{1}{2}N)$ について，上の基底 $(e_m^j)_{m \in I_j}$ に関する行列要素 w_{mn}^j $(m, n \in I_j)$ は，変数 $\zeta = -q^{-1}uv$ の little q ヤコビ多項式を用いて表される．具体的には (m, n) の領域を四つに分けて，次の形で与えられる．

1）　$m+n \geq 0,\ m \geq n$ のとき：　$w_{mn}^j = c_{mn}^j x^\beta u^\alpha p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q^2)$

2）　$m+n \geq 0,\ m \leq n$ のとき：　$w_{mn}^j = c_{mn}^j x^\beta v^\alpha p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q^2)$

3）　$m+n \leq 0,\ m \geq n$ のとき：　$w_{mn}^j = c_{mn}^j p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q^2) u^\alpha y^\beta$

4）　$m+n \leq 0,\ m \leq n$ のとき：　$w_{mn}^j = c_{mn}^j p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q^2) v^\alpha y^\beta$

ここで $\alpha = |m-n|,\ \beta = |m+n|,\ k = \min\{j \pm m,\ j \pm n\}$ と記した．また c_{mn}^j は 0 でない定数である．◇

証明の方法はいろいろあるが，最も直接的なのは計算（3.7）を一般的に遂行することである．複雑にはなるが，原理的には $\rho(e_n^j)$ を q 二項定理を用いて展開し，それを q-Chu-Vandermonde の公式を用いて整理すればよい．

以下 q は実数で $0 < |q| < 1$ をみたすものとしよう．このときホップ＊代数 $\mathcal{A} = A_q(SU(2))$ 上の右余加群として各 V_j はユニタリ化可能である．つまり V_j $(j \in \frac{1}{2}N)$ は量子群 $SU_q(2)$ のユニタリ表現となる．実際には，V_j の基底 $(e_m^j)_{m \in I_j}$ の定義に含まれている定数 c_m^j を $c_m^j = \begin{bmatrix} 2j \\ j+m \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}}$ ととれば，$(e_m^j)_m$ を正規直交基底とする内積に関して V_j はユニタリ表現であり，表現行列 $W^j = (w_{mn}^j)_{mn}$ は前に述べた意味でユニタリ行列となる．このとき，行列要素の表示に現れる定数 c_{mn}^j は (m, n) のどの領域でも

$$c_{mn}^j = q^{-k\alpha} \begin{bmatrix} \alpha+k \\ \alpha \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \alpha+\beta+k \\ \alpha \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}}$$

となる．以下ではこの形で e_m^j, w_{mn}^j を正規化しておく．

4° 直交関係式の解釈

行列要素の表示に現れた little q ヤコビ多項式は，「q 積分」の離散的な測度に関する直交多項式系である．いま $q \in \boldsymbol{R}$, $0<q<1$ として，q 区間 $[0, c]_q$ 上の q 積分を

$$\int_0^c f(t)\, d_q t \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f(cq^k)\,(cq^k - cq^{k+1}) \tag{4.1}$$

なる級数として定義しよう．この種の q 積分はジャクソン (Jackson) 積分と呼ばれることも多いが，歴史的には Thomae-Jackson の q 積分と呼ぶほうが正しいようである．（もっとも Askey によれば，すでに Fermat が積分 $\int_0^c t^n dt$ の値を求めるのに q 積分からの極限操作を考えているということなので，Fermat の名前を冠するほうがよいのかもしれない．）このとき little q ヤコビ多項式 $p_k^{(\alpha,\beta)}(t;q)$ $(k \in \boldsymbol{N})$ は次の形の **直交関係式** をみたす：

$$\int_0^1 p_k^{(\alpha,\beta)}(t;q)\,p_{k'}^{(\alpha,\beta)}(t;q)\,t^\alpha (qt;q)_\beta\, d_q t \;=\; 0 \qquad (k, k' \in \boldsymbol{N},\ k \neq k'). \tag{4.2}$$

我々の文脈では，この直交関係式は量子群 $SU_q(2)$ の既約ユニタリ表現の行列要素が「ハール (Haar) 測度」から定まる内積で直交するという事実から従う．量子群 $SU_q(2)$ の座標環 $\mathcal{A} = A_q(SU(2))$ は，余積によって自分自身の上の両側余加群とみなせる（正則表現）．各既約表現 V_j $(j \in \frac{1}{2}\boldsymbol{N})$ に対して，その行列要素から生成される $A_q(SU(2))$ の部分空間を W_j と書こう：

$$W_j \;=\; \sum_{m,n \in I_j} \boldsymbol{C} w_{mn}^j \subset A_q(SU(2)) \qquad \left(j \in \frac{1}{2}\boldsymbol{N}\right). \tag{4.3}$$

このとき各 W_j は $A_q(SU(2))$ の両側部分余加群であり，$A_q(SU(2))$ は両側余加群として次の形に直和分解される：

$$A_q(SU(2)) \;=\; \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\boldsymbol{N}} W_j, \qquad W_j \;\simeq\; V_j^{\vee} \otimes V_j. \tag{4.4}$$

このときの自明な表現 $W_0 = \boldsymbol{C}$ への射影を $h: A_q(SU(2)) \to \boldsymbol{C}$ で表せば，この汎関数 h が $SU(2)$ のハール測度の対応物を与える．そこで $\varphi, \psi \in A_q(SU(2))$ に

対し

$$\langle \varphi, \psi \rangle = h(\varphi^* \psi) \tag{4.5}$$

とおくと，$\langle\ ,\ \rangle$ は $A_q(SU(2))$ 上に右 $\mathcal{A}$ 余加群として不変なエルミート内積を定めることがわかる．さらに，上の直和分解（4.4）はこの内積に関して直交直和となり，行列要素 w^j_{mn} $(j \in \frac{1}{2}N,\ m, n \in I_j)$ は全体として $A_q(SU(2))$ の直交基底を与える．より詳しく述べると，行列要素の内積について

$$\langle w^j_{mn}, w^{j'}_{m'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \frac{q^{2(j-m)}}{[2j+1]_{q^2}} \tag{4.6}$$

が成立する．（以上まとめて **Peter-Weyl 型定理** という．行列要素の直交性はしばしば Schur の直交関係式と呼ばれる．）

いま $\zeta = -q^{-1}uv$ で生成される部分環 $\mathbf{C}[\zeta] \subset A_q(SU(2))$ を考えよう．このとき，ζ の多項式 $f(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$ に対しハール測度の値は q 積分

$$h(f(\zeta)) = \int_0^1 f(\zeta)\, d_{q^2}\zeta \tag{4.7}$$

で与えられることがわかる．これと，Schur の直交関係式（4.6）を組み合わせると，little q ヤコビ多項式 $p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta, q^2)$ の直交関係式が従う．たとえば，$y^\beta x^\beta = (q^2\zeta; q^2)_\beta$ に注意すると (m, n) が定理の記号で 1）の領域にあるとき

$$(x^\beta u^\alpha)^* x^\beta u^\alpha = (-q^{-1}v)^\alpha y^\beta x^\beta u^\alpha = \zeta^\alpha (q^2\zeta; q^2)_\beta \tag{4.8}$$

である．したがって

$$(w^j_{mn})^* w^{j'}_{mn} = c^j_{mn} c^{j'}_{mn} p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta; q^2) p_{k'}^{(\alpha,\beta)}(\zeta; q^2) \zeta^\alpha (q^2\zeta; q^2)_\beta . \tag{4.9}$$

これと（4.7）を用いて（4.6）を書き直すと

$$\begin{aligned}\int_0^1 p_k^{(\alpha,\beta)}(\zeta; q^2) p_{k'}^{(\alpha,\beta)}(\zeta; q^2) \zeta^\alpha (q^2\zeta; q^2)_\beta d_{q^2}\zeta &= \delta_{jj'} \frac{q^{2(j-m)}}{[2j+1]_{q^2}} (c^j_{mn})^{-2} \\ &= \delta_{kk'} \frac{q^{2k(\alpha+1)}}{[\alpha+\beta+2k+1]_{q^2}} \begin{bmatrix} \alpha+k \\ \alpha \end{bmatrix}_{q^2}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha+\beta+k \\ \alpha \end{bmatrix}_{q^2}^{-1}\end{aligned} \tag{4.10}$$

を得る．

量子群 $SU_q(2)$ の既約ユニタリ表現の行列要素として，little q ヤコビ多項式が現れ，それによって自然に little q ヤコビ多項式の直交関係式が導かれることを述べた．この little q ヤコビ多項式はこれ以外にも特殊関数としてのさまざまな性質をもっており，q 差分方程式，隣接関係式（Rodrigues の公式），三項間漸化式といったものについても，量子群によって表現論的な解釈を与えることができる．最後に，little q ヤコビ多項式のみたす q 差分方程式と量子包絡環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の関係についての注釈を述べて終わりにしよう．

ここでいう q 差分方程式はちょうど，ガウスの超幾何関数のみたす微分方程式に対応するもので，little q ヤコビ多項式 $u(t)=p_k^{(\alpha,\beta)}(t;q)$ に対する方程式として書くと次のようなものである：

$$\begin{aligned}\{qt(1-t)D_{q,t}^2T_{q,t}^{-1}+([\alpha+1]_q-[\alpha+\beta+2]_qt)D_{q,t}\\+q^{-k+1}[k]_q[\alpha+\beta+k+1]_q\}u(t)=0\end{aligned}\tag{4.11}$$

ここで $T_{q,t}, D_{q,t}$ は次で定義される q シフトの作用素と「q 微分」である：

$$T_{q,t}u(t)=u(qt),\qquad D_{q,t}u(t)=\frac{u(t)-u(qt)}{(1-q)t}.\tag{4.12}$$

量子包絡環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は，およそ座標環 $A_q(SL(2;\boldsymbol{C}))$ または $A_q(SU(2))$ の双対にあたるホップ代数であって，生成元 K, K^{-1}, E, F と次の交換関係で決まる $\boldsymbol{C}$ 代数である．K, K^{-1} は互いに逆元であって

$$KE=qEK,\qquad KF=q^{-1}FK,\qquad EF-FE=\frac{K^2-K^{-2}}{q-q^{-1}}.\tag{4.13}$$

ホップ代数の構造として，たとえば

$$\begin{aligned}\Delta(K)&=K\otimes K, & \varepsilon(K)&=1\\ \Delta(E)&=E\otimes K+K^{-1}\otimes E, & \varepsilon(E)&=0\\ \Delta(F)&=E\otimes K+K^{-1}\otimes F, & \varepsilon(F)&=0\end{aligned}\tag{4.14}$$

なるものがとれる．

正則表現の微分表現にあたるものとして，座標環 $A_q(SU(2;\boldsymbol{C}))$ は自然な左

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群の構造をもつ．K は代数の準同型として作用し，生成元の上では

$$K.x = xq^{1/2}, \quad K.u = uq^{-1/2}, \quad K.v = vq^{1/2}, \quad K.y = yq^{-1/2}. \tag{4.15}$$

E は $A_q(SU(2;C))$ の積に関して

$$E.(\varphi\psi) = E.\varphi K.\psi + K^{-1}.\varphi E.\psi, \quad E.1 = 0 \tag{4.16}$$

なる「捩じれた微分」として作用し，生成元の上では

$$E.x = 0, \quad E.u = x, \quad E.v = 0, \quad E.y = v \tag{4.17}$$

と作用する．F も積に対して E と同じ形の規則で作用し，生成元に対しては

$$F.x = u, \quad F.u = 0, \quad F.v = y, \quad E.y = 0 \tag{4.18}$$

となる．$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元の $A_q(SU(2;C))$ の元の積に対する作用を決める「ライプニッツの規則」が (4.14) の $\varDelta, \varepsilon$ で与えられていることに注意してほしい．この規則で，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $A_q(SU(2;C))$ への作用が完全に定まっている．

代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心はカシミール (Casimir) 元と呼ばれる元

$$C = FE + \frac{1}{(q-q^{-1})^2}(K-K^{-1})(qK-q^{-1}K^{-1}) \tag{4.19}$$

で生成される．このカシミール元 C の $A_q(SU(2;C))$ への作用を考えると，Peter-Weyl 型の分解 (4.4) は C の作用の固有空間分解を与えることがわかる：

$$W_j = \{\varphi \in A_q(SU(2))\,;\, C.\varphi = [j][j+1]\varphi\}. \tag{4.20}$$

ここで $[\alpha] = (q^\alpha - q^{-\alpha})/(q-q^{-1})$ という記法を用いた．また $[j][j+1]$ は C が既約表現 V_j に「微分表現」で作用するときの固有値である．したがって，各行列要素は

$$C.w^j_{mn} = [j][j+1]w^j_{mn} \qquad \left(j \in \frac{1}{2}N,\ m, n \in I_j\right) \tag{4.21}$$

をみたす C の固有「関数」となる．C の作用を追跡して変数 $\zeta = -q^{-1}uv$ で表

すと，この式（4.21）が対応する little q ヤコビ多項式の q 差分方程式（4.11）にほかならないことがわかる．

参考文献

[1] 神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガー・フェアラーク東京，1990.

[2] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, in *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice* (P. Nevai ed.), NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1990, 257 – 292.

[3] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and K. Ueno, Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials, *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 357 – 386.

[4] M. Noumi, Quantum groups and q-orthogonal polynomials — Towards a realization of Askey-Wilson polynomials on $SU_q(2)$ —, in *Special Functions* (M. Kashiwara and T. Miwa, eds.), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer Verlag, 1991, 260 – 288.

[5] 野海正俊・三町勝久，量子群の表現論に現れる特殊函数 — Askey-Wilson 多項式の $SU_q(2)$ における実現 —，『特殊函数の代数的側面』研究会報告集（1989年12月，於名古屋大学），88 – 142.

[6] 上野喜三雄，量子群の表現論，数学，第42巻（1990）第1号，68 – 73.

第 9 話

量子群上のフーリエ解析

中神祥臣

ここでは，カッツ（Kac）環の研究に使われているフーリエ解析的手法を，量子群の場合へ一般化し，その双対性について考察することにする．

1° 双対定理の歴史的背景

熱伝導方程式の境界値問題を解決するなかで，Fourier により発見された古典調和解析の考え方は，Pontrjagin により可換局所コンパクト群の双対定理という新たな装いを与えられた．これはさらに Gelfand-Naimark により可換バナッハ＊環の連続関数環への表現へと発展させられ，抽象調和解析の基礎が確立した．最近話題になる非可換幾何の問題意識にも，このような数学的背景が深く関与している．

ここでは，双対群の元である指標を，バナッハ＊環の指標に読み変えることにより，双対定理を非可換群の場合へ拡張し，さらにその多元環としての非可換化（ある意味での量子化）であるホップ（Hopf）環，カッツ環に至る道筋を示す．量子群はこれらの後に発見された新しい概念である．

(1) 局所コンパクト群 G が可換な場合には，G から複素平面の乗法群 $\boldsymbol{T}=\{\lambda\in\boldsymbol{C}: |\lambda|=1\}$ への準同型写像を群 G の **指標** といい，指標全体の集合を $\widehat{G}$ で表す．この集合は各点ごとに定まる和に関して可換群になり，しかも，各コンパクト集合上で一様収束の位相に関して局所コンパクト群になる．そこで，これを群 G の **双対群** という．Pontrjagin の双対定理 [9] によれば，双対群 $\widehat{G}$ の双対群は，位相群として，もとの可換局所コンパクト群 G と同型になる．一般に，局所コンパクト群 G がコンパクトであることと，双対群 $\widehat{G}$ が離散的であ

ることは同値である．

例1　群 G が加法群 $\boldsymbol{Z}^n$ ならば，双対群 $\widehat{G}$ は加法群 $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ であり，このときの指標は $\gamma(t)=\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{n}t_j\gamma_j\right)$，$t=(t_j)\in G$，$\gamma=(\gamma_j)\in\widehat{G}$ で与えられる．

例2　群 G が加法群 $\boldsymbol{R}^n$ ならば，双対群 $\widehat{G}$ は加法群 $\boldsymbol{R}^n$ であり，このときの指標は $\gamma(t)=\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}t_j\gamma_j\right)$，$t=(t_j)\in G$，$\gamma=(\gamma_j)\in\widehat{G}$ で与えられる．

例3　群 G が時空を表す加法群 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^3$ ならば，双対群 $\widehat{G}$ はエネルギー・運動量を表す加法群 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^3$ であり，このときの指標は $\gamma(t)=\exp i\left(t_0\gamma_0-\sum_{j=1}^{3}t_j\gamma_j\right)$，$t=(t_j)\in G$，$\gamma=(\gamma_j)\in\widehat{G}$ で与えられる．

(2)　局所コンパクト群 G 上には左不変なハール (Haar) 測度 μ ($\mu(A)=\mu(tA)$, $t\in G$) が定数倍を除き一意的に存在する．ハール測度が有限であることと，局所コンパクト群がコンパクトなことは同値である．また，$\mu(At)=\Delta(t)\mu(A)$ により定まる G 上の正値関数 Δ を G の **モジュラー関数** という．これは群 G から乗法群 $\boldsymbol{R}^+\setminus\{0\}$ への準同型写像である．ここで

$$\nu(A) = \int_A \Delta(t)^{-1}\,d\mu(t)$$

とおけば，ν は右不変ハール測度である．モジュラー関数が恒等的に 1 となる局所コンパクト群をユニモジュラーという．可換群，コンパクト群，離散群，連結な半単純リー群などはユニモジュラーである．

(3)　局所コンパクト群 G 上の左不変ハール測度に関して可積分な関数の全体は各点ごとの和と定数倍によりベクトル空間になり，さらに畳み込み積

$$f*g(t) = \int_G f(s)\,g(s^{-1}t)\,d\mu(s)$$

により，多元環になる．また，ほとんど至る所一致する可積分関数を同一視して得られる関数族を $L^1(G)$ で表す．これはノルム

$$\|f\|_1 = \int_G |f(t)|\,d\mu(t)$$

によりバナッハ環になり，さらに，対合

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1}\,\overline{f(t^{-1})}$$

によりバナッハ＊環になる．

上に述べた可積分関数の空間 $L^1(G)$ と同じように，二乗可積分関数の空間 $L^2(G)$ を考えることもできる．この空間は内積

$$(f|g) = \int_G f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

により，ヒルベルト空間になる．局所コンパクト群はいつでもこのヒルベルト空間上に

$$(\lambda(t)\xi)(s) = \xi(t^{-1}s), \qquad \xi \in L^2(G)$$

で定義されるユニタリ表現 $\{\lambda, L^2(G)\}$ をもつので，これを**左正則表現**という．同様にして，右正則表現 $\{\rho, L^2(G)\}$ も定義することができる．この正則表現に関しては，次のことが知られている．

(a)　J を $(J\xi)(t) = \Delta(t^{-1})^{1/2}\overline{\xi(t^{-1})}$, $\xi \in L^2(G)$ で定義すれば，J は $L^2(G)$ 上の共役線形な反ユニタリ作用素で $J^2 = 1$ をみたし，しかも

$$J\lambda(t)J = \rho(t), \qquad t \in G.$$

(b)　左正則表現の生成するフォン・ノイマン環を $R(G)$ とすれば，右正則表現の生成するフォン・ノイマン環はその可換子環 $R(G)'$ である．したがって，(a) より $JR(G)J = R(G)'$.

(4)　可換局所コンパクト群 G において，$f \in L^1(G)$ のフーリエ変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(t)} f(t)\,d\mu(t), \qquad \gamma \in \widehat{G},\ f \in L^1(G)$$

とすれば，たとえば $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$, $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$ などが成り立つ．ここで，$\mathcal{F}f = \hat{f}$ とすれば，写像 $\mathcal{F}$ はバナッハ＊環 $L^1(G)$ からフォン・ノイマン環 $L^\infty(\widehat{G})$ への＊準同型写像である．写像 $\mathcal{F}$ の $L^1(G) \cap L^2(G)$ への制限を $L^2(G)$ 上へ拡張したものを，改めて $\mathcal{F}$ とすれば，$\mathcal{F}$ はヒルベルト空間 $L^2(G)$ からヒルベルト空間 $L^2(\widehat{G})$ への全射等長写像を与える．したがって，これを用いると，

$$\mathcal{F}R(G)\mathcal{F}^{-1} = L^\infty(\widehat{G}), \qquad \mathcal{F}\lambda(t)\mathcal{F}^{-1} = \overline{\langle t, \cdot\rangle}$$

が成り立つ．ただし，$\gamma(t) = \langle t, \gamma\rangle$ である．この場合，バナッハ＊環 $L^1(G)$ から複素数体への単位的＊準同型写像 γ' の全体と双対群 $\widehat{G}$ は関係式

$$\gamma'(f) = \hat{f}(\gamma), \qquad \gamma \in \hat{G},\ f \in L^1(G)$$

により，1対1に対応している．そこで，これらγ'とγを同一視して，γ'をバナッハ＊環 $L^1(G)$ の指標という．この写像は $L^1(G)$ の双対空間 $L^\infty(\hat{G})$ の元であるから，指標空間つまり指標全体からなる集合はその積に関して可換群になる．しかもこの集合は双対空間の単位球の正部分に含まれているので，弱*位相に関して局所コンパクト群になる．（詳しくは，単位球の正部分の端点から0を除いた集合と一致する．）この位相は，$\hat{G}$ におけるコンパクト集合上の一様収束の位相と一致している．したがって，Pontrjagin の双対定理は，バナッハ＊環 $L^1(G)$ の指標空間が双対群 $\hat{G}$ になり，バナッハ＊環 $L^1(\hat{G})$ の指標空間がもとの群 G になると言い直すことができ，次のように図式化できる．

$$L^1(G) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^\infty(\hat{G})$$
$$L^\infty(G) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} L^1(\hat{G})$$

ただし，$\mathcal{F}^{-1}$ は逆フーリエ変換である．

(5) 局所コンパクト群が非可換な場合の指標とは何であろうか．淡中 [13]，Krein [4] は可換群の場合の指標を既約表現のカテゴリーと解釈し，上の定理をコンパクト群の場合へ拡張した．その後，この結果は Chevalley の教科書 [1] の中で，コンパクト群はいつでも代数群であることの証明に利用され，広く知られるようになった．局所コンパクト群の場合は，まず，Steinspring [10] が Segal の非可換積分論を用いて，ユニモジュラーな局所コンパクト群の場合を示し，最終的には，Eymard [3] はバナッハ＊環の立場から，辰馬 [14] は既約表現の立場から上の定理を一般の局所コンパクト群の場合へと拡張した．(4) で述べたように，可換局所コンパクト群の場合のフーリエ変換 $\hat{f}$ は $\mathcal{F}\left(\int_G f(t)\lambda(t)dt\right)\mathcal{F}^{-1}$ と表せるので，一般の局所コンパクト群の場合のフーリエ変換を，左正則表現を用いて，

$$\hat{\pi}(f) = \int_G f(t)\lambda(t)\,d\mu(t), \qquad f \in L^1(G)$$

で定義する．これにより，バナッハ＊環 $L^1(G)$ の表現 $\{\hat{\pi}, L^2(G)\}$，つまり，

$L^1(G)$ から $R(G)$ への＊準同型写像 $\hat{\pi}$ が得られる．一般に，フォン・ノイマン環 M に対して，$(M_*)^* \cong M$ となるようなバナッハ空間 M_* が一意的に定まり，これをフォン・ノイマン環 M の前双対空間という．$L^1(G)$ はフォン・ノイマン環 $L^\infty(G)$ の前双対空間である．左正則表現の生成するフォン・ノイマン環 $R(G)$ の前双対空間 $R(G)_*$ は，積と対合

$$(\varphi * \psi)(\lambda(t)) = \varphi(\lambda(t))\,\psi(\lambda(t)), \qquad \varphi^*(\lambda(t)) = \overline{\varphi(\lambda(t))}$$

により可換バナッハ＊環になる．そこで，$R(G)_*$ から $L^\infty(G)$ への逆フーリエ変換 $\hat{\hat{\pi}}$ を $(\hat{\hat{\pi}}(\varphi))(t) = \varphi(\lambda(t))$，$\varphi \in R(G)_*$ で定義すれば，次の図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} L^1(G) & \xrightarrow{\ \hat{\pi}\ } & R(G) \\ L^\infty(G) & \xleftarrow{\ \hat{\hat{\pi}}\ } & R(G)_* \end{array}$$

つまり，可換バナッハ＊環 $R(G)_*$ の指標空間が G になるというのが双対定理である．いまでは，局所コンパクト群が非可換な場合の双対群に相当するものは，連続ユニタリ表現全体のなすモノイダル・カテゴリーで，共役に関して閉じたものと考えることが多く，可換な場合と比べはるかに複雑な様相を呈している．

(6)　その後，Krein や竹崎は双対定理を詳細に検討するなかで，フォン・ノイマン環 $L^\infty(G)$ の可換性は必ずしも本質的ではないことに気づき，可換性を仮定せずに，それまで Ernest たちが研究していたホップ-フォン・ノイマン環の考え方を推し進めて，双対定理の再構築を試みた．その際，Steinspring が双対定理を証明するときに導入した $L^2(G \times G)$ 上のユニタリ作用素 W：

$$(W\xi)(t, s) = \xi(t, ts)$$

を活用する手法，つまり正則表現の作用素論的取り扱いが効果を発揮した．これにより，“群の量子化”ともいうべきカテゴリーが新たに発見され，後に，Enock と Schwartz によりカッツ環と命名された．竹崎の研究 [12] はそこに現れるフォン・ノイマン環として半有限型のものに限って双対定理を証明していたが，Enock と Schwartz [2] は冨田-竹崎理論 [11] を用いて，これを一般の場合へ拡張した．もちろん，カッツ環が可換な場合には，適当な局所コンパクト群 G に対応するフォン・ノイマン環 $L^\infty(G)$ として表せる．

2° 位相量子群とハール状態

量子群の記述は，第7，8話のように，代数的な枠組みだけで論じられることが多い．しかしここでは，C^* 環を用いて量子群に位相的性格をもたせることにより，量子群 $SU_q(n)$ の位相的 K 理論を計算したり，コンパクト量子群上のハール状態の存在を古典論と同じように論じたりすることができることを示す．

まず，C^* 環を用いることの意味を知るために，可換な場合について話をする．双対定理の歴史的背景の（4）で述べたように，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は可換バナッハ＊環 $L^1(G)$ から $L^\infty(\widehat{G})$ への＊準同型写像を与えていた．これを一般の C^* 環の場合へ拡張したのが次に述べるゲルファント（Gelfand）表現である．

定理1　（i）可換 C^* 環 $\mathcal{A}$ の指標全体からなる集合 $\Omega_{\mathcal{A}}$ は弱*位相に関して局所コンパクト・ハウスドルフ空間である．

（ii）$\mathcal{A}$ は無限遠で 0 になる連続関数全体からなる連続関数環 $C_\infty(\Omega_{\mathcal{A}})$ と＊同型である．

（iii）$\mathcal{A}$ が単位的ならば，$\Omega_{\mathcal{A}}$ はコンパクトであり，$C_\infty(\Omega_{\mathcal{A}}) = C(\Omega_{\mathcal{A}})$ となる．

（iv）$\mathcal{A}$ から可換 C^* 環 $\mathcal{B}$ 上への＊準同型写像 π があれば，

$$f(\rho(\omega)) = (\pi(f))(\omega), \qquad f \in \mathcal{A},\ \omega \in \Omega_{\mathcal{B}}$$

をみたす $\Omega_{\mathcal{B}}$ から $\Omega_{\mathcal{A}}$ の中への同相写像 ρ が存在する．◇

この定理により，可換 C^* 環のカテゴリーと局所コンパクト・ハウスドルフ空間のカテゴリーが，反変ファンクターにより同値になることがわかる．その結果，可換 C^* 環という代数的な対象に対し，局所コンパクト・ハウスドルフ空間という幾何学的描像を与えることができる．この考え方は非可換な多元環に，“非可換位相空間”“非可換多様体 ”といった幾何学的解釈を与えるきっかけになった．Woronowicz が量子群を発見した経緯も，この種の問題に端を発している．

＊多元環 A の表現の全体を $\mathrm{Rep}(A)$ で表す．A の各元 $a \in A$ に対し，

$$\|a\| = \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \in \mathrm{Rep}(A)\}$$

とおく．この値が有限になる保証はないが，有限な場合には C^* 条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ をみたす半ノルムになるから，商＊多元環 $A_0 = A/\{a \in A : \|a\| = 0\}$ 上に

C^* 条件をみたすノルムを導く．したがって，その完備化 $\mathscr{A}$ は C^* 環になり，A の包絡 C^* 環と呼ばれている．たとえば，バナッハ＊環の表現はいつでも連続であるから，包絡 C^* 環が存在する．

ホップ＊環 $(A, \delta_A, \varepsilon_A, \kappa_A)$ の場合（ホップ＊環の定義で，余逆写像 κ_A にヴォロノヴィッツ (Woronowicz) 条件 $\kappa_A^{\pm}(a^*) = \kappa_A^{\mp}(a)^*$ を仮定している），もし A に忠実な表現があれば，A は包絡 C^* 環 $\mathscr{A}$ の稠密＊部分多元環と同一視でき，余積 δ_A は $\mathscr{A}$ から $\mathscr{A}\otimes_{\min}\mathscr{A}$ への＊準同型写像 $\delta_{\mathscr{A}}$ へ，余単位写像 ε_A は $\mathscr{A}$ から $\boldsymbol{C}$ への＊準同型写像 $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ へと自然に拡張される．さらに，余逆写像 $\kappa_{\mathscr{A}}$ はもとの κ_A と同一視することにすれば，新たに C^* 環を用いた組 $(\mathscr{A}, \delta_{\mathscr{A}}, \varepsilon_{\mathscr{A}}, \kappa_{\mathscr{A}})$ が得られる．たとえば，量子群 $SU_q(n)$ の座標環 $A(SU_q(n))$ は，忠実な表現をもち，ノルムも有限に確定するので，このとき得られる組 $(\mathscr{A}, \delta_{\mathscr{A}}, \varepsilon_{\mathscr{A}}, \kappa_{\mathscr{A}})$ を $SU(n)$ に対する**コンパクト行列量子群**と呼び，$C(SU_q(n))$ で表す．$n=2$ の場合，この C^* 環に対しては，短完全系列

$$0 \to C(\boldsymbol{T})\widehat{\otimes}\mathscr{K} \to \mathscr{A} \to C(\boldsymbol{T}) \to 0$$

が成り立つ．ただし，$\mathscr{K}$ は可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体からなる C^* 環である．このとき，$\mathscr{K}$ は非可換2次元単位円板，$C(\boldsymbol{T})\widehat{\otimes}\mathscr{K}$ はその懸垂である非可換2次元球と解釈できるので，$C(SU_q(2))$ の C^* 環 $\mathscr{A}$ は非可換3次元球面と解釈することができる．実際，$C(SU_q(n))$ の K 群は古典論（$q=1$）の場合の結果と一致している．これは量子群を用いて定義された非可換3次元球面の位相幾何的性質と考えられる [7]．しかし，座標環 $A(SU_q(2))$ の代数的 K 群はまだわかっていない．

定義1　(i)　単位元をもつ C^* 環 $\mathscr{A}$，余結合的余積 $\delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}\otimes_{\min}\mathscr{A}$，余単位写像 $\varepsilon : \mathscr{A} \to \boldsymbol{C}$ および C^* 環の稠密＊部分多元環 A 上でヴォロノヴィッツ条件をみたす余逆写像 κ からなる組 $(\mathscr{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ が条件：

$(\mathscr{A}\otimes \boldsymbol{C}1)\delta(\mathscr{A})$ および $(\boldsymbol{C}1\otimes\mathscr{A})\delta(\mathscr{A})$ はそれぞれ $\mathscr{A}\otimes_{\min}\mathscr{A}$ において稠密である

をみたすとき，**コンパクト量子群**という．

(ii)　さらに，C^* 環 $\mathscr{A}$ 上の状態（または荷重）h で

$$(\mathrm{id}\otimes h)(\delta(a)) = h(a)1, \qquad a\in \boldsymbol{m}_h^+$$

をみたすものを**左不変ハール状態**（または**荷重**）という．ただし，$\boldsymbol{n}_h$ は $\mathscr{A}$ の左イデアル $\{x\in\mathscr{A} : h(x^*x)<\infty\}$ であり，$\boldsymbol{m}_h^+$ は集合 $\{y^*x : x, y\in \boldsymbol{n}_h\}$ の線形拡大 $\boldsymbol{m}_h$ の正部分である．同様に，右不変ハール状態（または荷重）も定義される．◇

定理2　(i)　コンパクト量子群上には左不変ハール状態が一意的に存在し，右不変でもある．

(ii)　C^* 環 $\mathscr{A}$ が可分ならば，ハール状態は忠実である．◇

たとえば，コンパクト行列量子群 $C(SU_q(n)) = (\mathscr{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ は，$\mathscr{A}$ の可分性と座標環 $A(SU_q(n))$ の C^* 環における稠密性により，上の定義1 (i) の条件を自動的にみたすので，コンパクト量子群である．したがって，$\mathscr{A}$ 上に忠実なハール状態が存在し，これを＊部分多元環 A 上に制限したものも，A の忠実なハール状態である．

3° 可測量子群とヴォロノヴィッツ環

前にも触れたように，双対定理により，コンパクト群は代数群である．したがって，コンパクト群に対応する量子群に関しては，作用素環を用いずに，代数的なホップ環またはホップ＊環の枠組みだけで議論できることが多い．しかし，局所コンパクト群に対応する量子群に対しては，そのようなことは期待できず，なんらかの意味で関数解析的な議論が必要になる．そこで，一般の量子群の双対性を論じる場合には，C^* 環の枠組みを使ってみたい．しかし，手掛けてみると，ただちに，いくつかの技術的問題に遭遇する．そこで，当面はカッツ環の考え方を全面的に活用して，量子群をフォン・ノイマン環の枠組みで捉えることにする．その結果，本論の主題であるヴォロノヴィッツ環の概念に到達する．

最初に述べたように，局所コンパクト群のカテゴリーはカッツ環のカテゴリーに含まれている．また，第7，8話でわかるように，量子群は主に古典リー群を

q 変形して得られる．そこで，カッツ環の q 変形に相当するカテゴリーで量子群のカテゴリーを含むようなものを問題にしてみよう．これから述べるヴォロノヴィッツ環はその一つの解答を与えているが，そこでは，q 変形の代りに，変形自己同型と呼ばれる 1 径数自己同型群が導入されている．この自己同型が自明な場合には，ヴォロノヴィッツ環はカッツ環になる．これにより，コンパクト量子群および局所コンパクト群に対応する量子群で，うまい表現が存在するものに対しては，その可測群的な性質をすべてヴォロノヴィッツ環のカテゴリーで議論できるものと思われる．

$$\begin{array}{ccc} \text{群} & \longrightarrow & \text{カッツ環} \\ {\scriptstyle q\,\text{変形}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{変形自己同型}} \\ \text{量子群} & \longrightarrow & \text{“ヴォロノヴィッツ環”} \end{array}$$

まず，カッツ環の定義を述べよう．すでにわかっているように，局所コンパクト群およびコンパクト量子群の場合には，ハール状態の存在が自動的に導かれるが，カッツ環の場合にはその存在を定義の中で仮定しなければならない．

定義 2　フォン・ノイマン環 M，正規＊同型写像 $\delta: M \to M\overline{\otimes}M$，全射＊反自己同型写像 $R: M \to M$，半有限，忠実，正規荷重 $h: M \to \mathbf{C}$ からなる組 (M, δ, R, h) が次の 3 条件をみたすとき，**カッツ環** という．

(i)　δ は余結合法則をみたす．

(ii)　$R^2 = \mathrm{id}$ かつ $(R\otimes R)\circ\delta = \sigma\circ\delta\circ R$．ここで，$\sigma$ は $M\overline{\otimes}M$ 上の自己同型 $\sigma(a\otimes b) = b\otimes a$ である．

(iii)　h に対しては左不変性の他に次の 2 条件を仮定する．

(a)　強左不変性：$x, y \in \boldsymbol{n}_h$ に対し，

$$(\mathrm{id}\otimes h)((1\otimes y^*)\delta(x)) = (R\otimes h)(\delta(y)^*(1\otimes x)),$$

(b)　可換性：h と $h\circ R$ のモジュラー自己同型は可換である．◇

ホップ＊環の場合には，余逆写像 κ にヴォロノヴィッツ条件が仮定されていて，必ずしも＊演算を保存しなかったが，カッツ環の場合には余逆写像 R が＊演算を保存している点に注意すべきである．また，ホップ＊環の定義に比べて，

カッツ環の定義は複雑に見えるが，有限次元の場合には，これら二つの対象は同値であることがわかっている．

いよいよ，量子群の双対性を示すためのカテゴリーを定義する．そこでもカッツ環の場合と同じように，ハール荷重の存在が仮定されている．

定義3　フォン・ノイマン環 M，正規＊同型写像 $\delta : M \to M\overline{\otimes} M$，全射＊反自己同型写像 $R : M \to M$，連続1径数＊自己同型群 $\{\tau_t\}$，半有限，忠実，正規荷重 $h : M_+ \to \boldsymbol{R}$ からなる組 (M, δ, R, τ, h) が次の4条件をみたすとき，**ヴォロノヴィッツ環** という．

(i)　δ は余結合法則をみたす．

(ii)　$R^2 = \mathrm{id}$ かつ $(R \otimes R) \circ \delta = \sigma \circ \delta \circ R$.

(iii)　$(\tau_t \otimes \tau_t) \circ \delta = \delta \circ \tau_t$,　$R \circ \tau_t = \tau_t \circ R$.

(iv)　h に対しては左不変性の他に次の2条件を仮定する．

(a)　強左不変性：$\{\tau_t\}$ に関して $\boldsymbol{C}$ 全体で解析的な元 $x, y \in \boldsymbol{n}_h$ に対して，

$$(\mathrm{id} \otimes h)((1 \otimes y^*)\delta(x)) = (\tau_{-i/2} \circ R \otimes h)(\delta(y)^*(1 \otimes x)),$$

(b)　可換性：h と $h \circ R$ のモジュラー自己同型は可換である．◇

この場合にも，ホップ環の場合と同じように，δ を **余積**，R を **ユニタリ余逆写像**，$\{\tau_t\}$ を **変形自己同型**，h を **左不変ハール荷重** という．余逆写像の役割は合成写像 $R \circ \tau_{-i/2} = \tau_{-i/2} \circ R$ が果たす．上で，$h \circ R$ は荷重であり，h の左不変性により，右不変である．モジュラー自己同型の可換性により，Connes のラドン-ニコディム導関数 $(Dh \circ R : Dh)_t$ はモジュラー関数に相当する正自己随伴作用素 ρ を用いて，$\rho^{it} = (Dh \circ R : Dh)_{-t}$ と表せる．この場合にも，ヴォロノヴィッツ環が可換な場合には，$L^\infty(G)$ と同一視できるし，有限次元の場合には，ホップ＊環と一致している．

この定義が意味をもつためには，少なくとも次のことがいえなくてはならない．

1. 自明でない例が存在する．
2. 自明でない結果が導ける．
3. 量子群の一つの表記法になっている．

このうち，1 と 3 に関しては，量子群 $SU_q(n)$ ($n \geq 2$) がこの枠組みで取り扱えることを示す．2 に関しては，双対定理が成り立つことを示す．実際のところは，これらの条件が成り立つように定義を考えてみたら，カッツ環に変形自己同型群を付与した形が得られたというのが真相であり，その過程で用いられた手法が表題に掲げる量子群上のフーリエ解析である．

ここで，量子群の記述にフォン・ノイマン環を用いることの意味について，一言触れておく．測度空間が有限測度空間の直和として表されるとき，分解可能であるという．たとえば，σ 有限な測度空間は分解可能である．

定理3　フォン・ノイマン環 M が可換ならば，分解可能な測度空間 (Ω, μ) が存在して，その上のフォン・ノイマン環 $L^\infty(\Omega, \mu)$ と＊同型である．◇

したがって，量子群をフォン・ノイマン環を用いて記述することは，量子群の可測群としての性質を論ずることになる．以下の話ではもっぱらフォン・ノイマン環を用いるが，C^* 環についても同様な議論が期待されており，フォン・ノイマン環を用いたのは単に技術的な理由によるところが大きい．

最後に，量子群 $SU_q(n)$ のヴォロノヴィッツ環としての捉え方を解説する．コンパクト量子群 $C(SU_q(n)) = (\mathscr{A}, \delta_\mathscr{A}, \varepsilon_\mathscr{A}, \kappa_\mathscr{A})$ 上の忠実なハール状態 $h_\mathscr{A}$ を用いて，$\mathscr{A}$ における正定値内積を $(a|b) = h_\mathscr{A}(b^*a)$ で定義し，この内積により $\mathscr{A}$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathscr{H}_\mathscr{A}$ とする．ここで，

$$\pi_{h_\mathscr{A}}(a)b = ab, \qquad a, b \in \mathscr{A}$$

とすれば，$\mathscr{A}$ の**巡回表現** $\{\pi_{h_\mathscr{A}}, \mathscr{H}_\mathscr{A}\}$ が得られる．このような表現の作り方は，ハール状態の代りに，任意の半有限，忠実，正規荷重を用いることができるので，通常 **GNS 構成法** と呼ばれている．C^* 環 $\mathscr{A}$ の元とヒルベルト空間 $\mathscr{H}_\mathscr{A}$ の元を区別するために，ヒルベルト空間の元に対しては，a の代りに，$\eta_{h_\mathscr{A}}(a)$ なる記号を用いる．つまり，

$$(\pi_{h_\mathscr{A}}(a)\eta_{h_\mathscr{A}}(b) \,|\, \eta_{h_\mathscr{A}}(c)) = h_\mathscr{A}(c^*ab), \qquad a, b, c \in \mathscr{A}$$

である．$\pi_{h_\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \{\pi_{h_\mathscr{A}}(a) : a \in \mathscr{A}\}$ の弱作用素位相による閉包として得られるフォン・ノイマン環を M とすれば，余積もハール状態もともに M 上へ自然に拡張され，弱作用素位相に関し連続になる．それらを，それぞれ δ, h で表す．つま

り，

$$\delta(\pi_{h_{\mathcal{A}}}(a)) = (\pi_{h_{\mathcal{A}}} \otimes \pi_{h_{\mathcal{A}}})(\delta_{\mathcal{A}}(a)) \quad かつ \quad h(\pi_{h_{\mathcal{A}}}(a)) = h_{\mathcal{A}}(a).$$

ハール状態 $h_{\mathcal{A}}$ の忠実性により，表現 $\pi_{h_{\mathcal{A}}}$ も忠実であるから，C^* 環 $\mathcal{A}$ はフォン・ノイマン環 M の稠密＊部分多元環 $\pi_{h_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$ と同一視できる．余逆写像 $\kappa_{\mathcal{A}}$ の性質を用いると，ユニタリ余逆写像 R，変形自己同型群 $\{\tau_t\}$，モジュラー自己同型群 $\{\sigma_t\}$ の存在が示され，同時にハール状態 h の忠実性がわかる．さらに，ハール状態がこれらの＊自己同型群に関して不変なこともわかる．これらの議論を通して，組 (M, δ, R, τ, h) はヴォロノヴィッツ環であることがわかるので，これを $L^\infty(SU_q(n))$ で表す．詳細は［6］を参照していただきたい．

Podleś - Woronowicz [8] が発見した Drinfeld 流の二重群構成法を用いると量子ローレンツ群 $SL_q(2, C)$ もヴォロノヴィッツ環として扱える見込みである．

4° ヴォロノヴィッツ環の双対定理

前にも触れたように，カッツ環の場合の双対定理の証明では，左正則表現に相当する $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 W が重要な役割を果した．この作用素の随伴作用素 W^* は5角関係式

$$W_{12}^* W_{13}^* W_{23}^* = W_{23}^* W_{12}^*$$

をみたしている．ただし，W_{ij} は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上の作用素で i, j 番目の空間に W として，残りには恒等作用素として作用している．ヴォロノヴィッツ環 (M, δ, R, τ, h) の場合にも，ハール荷重の左不変性を用いると，

$$W\eta_{h\otimes h}(x \otimes y) = \eta_{h\otimes h}(\delta(y)(x \otimes 1)), \qquad x, y \in \boldsymbol{n}_h$$

により，5角関係式をみたす $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 W が定義され，**カッツ - 竹崎作用素** と呼ばれている．この式から，余積との関係は

$$\delta(x) = W(1 \otimes x)W^*, \qquad x \in M$$

で与えられる．また，W は左正則表現の役割をしているので，

$$\hat{\pi}(\varphi) = (\varphi \otimes id)(W^*), \qquad \varphi \in M_*$$

によりフーリエ変換 $\hat{\pi}$ が与えられる．そこで，集合 $\{\hat{\pi}(\varphi):\varphi\in M_*\}$ により生成されるフォン・ノイマン環を $\hat{M}$ で表す．これは双対ヴォロノヴィッツ環を定義するときのフォン・ノイマン環であり，カッツ－竹崎作用素 W はフォン・ノイマン環 $M\overline{\otimes}\hat{M}$ の元になる．ここで，$\hat{W}=\sigma(W^*)$ とすれば，$\hat{W}$ も5角関係式をみたす．これを用いて，

$$\hat{\delta}(y) = \hat{W}(1\otimes y)\hat{W}^*, \qquad y\in\hat{M}$$

とすれば，$\hat{\delta}$ は $\hat{M}$ 上の余積になる．さらに，次に述べる冨田－竹崎理論を用いると，フォン・ノイマン環 $\hat{M}$ 上に，

$$\hat{R}(\hat{\pi}(\varphi)) = \hat{\pi}(\varphi\circ R), \qquad \hat{\tau}_t(\hat{\pi}(\varphi)) = \hat{\pi}(\varphi\circ\tau_{-t})$$

をみたす＊反自己同型写像 $\hat{R}$ と1径数＊自己同型群 $\{\hat{\tau}_t\}$ が存在することを示すことができる．（ハール荷重が状態の場合には，$\{\tau_t\}$ に関して解析的な M の元 x に対して，$\mathcal{F}x=\hat{\pi}(R\circ\tau_{i/2}h)$ とおいて得られる $\hat{M}$ の元を x のフーリエ変換といったほうが分かりやすいかもしれない．ただし，$(bh)(a)=h(ab)$ である．）

一般に，フォン・ノイマン環に半有限，忠実，正規荷重を与えた議論と，次に定義するヒルベルト環の議論は同値になることがわかっている．そこで，これを用いて，バナッハ空間に関する議論をヒルベルト空間に関する議論へ帰着させることができる．

定義4　対合 $\xi\mapsto\xi^\#$ をもつ対合多元環 $\boldsymbol{a}$ に正定値内積が与えられ，次の4条件をみたすとき，**左ヒルベルト環**という．

（i）　$(\xi\eta\mid\zeta)=(\eta\mid\xi^\#\zeta)$

（ii）　各 ξ に対して，$\|\xi\eta\|\le\lambda\|\eta\|,\ \eta\in\boldsymbol{a}$ をみたす $\lambda>0$ が存在する．

（iii）　集合 $\{\xi\eta:\xi,\eta\in\boldsymbol{a}\}$ の線形拡大は $\boldsymbol{a}$ において稠密である．

（iv）　共役線形写像：$\xi\mapsto\xi^\#$ は可閉である．◇

フォン・ノイマン環 M 上に半有限，忠実，正規荷重 φ が与えられると，前のように巡回表現を作ることができる．このときの記号を用いて得られる前ヒルベルト空間 $\{\eta_\varphi(x):x\in\boldsymbol{n}_\varphi,\ x^*\in\boldsymbol{n}_\varphi\}$ に積と対合を

$$\eta_\varphi(x)\eta_\varphi(y) = \eta_\varphi(xy), \qquad \eta_\varphi(x)^\# = \eta_\varphi(x^*)$$

で与えると，左ヒルベルト環になり，これを $\boldsymbol{a}_\varphi$ で表す．

逆に，左ヒルベルト環 $\boldsymbol{a}$ が与えられているときには，それを完備化して得られるヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上への左表現 π_l を

$$\pi_l(\xi)\eta = \xi\eta, \qquad \xi, \eta \in \boldsymbol{a}$$

で定義する．集合 $\pi_l(\boldsymbol{a}) = \{\pi_l(\xi) : \xi \in \boldsymbol{a}\}$ の生成するフォン・ノイマン環を $\mathcal{L}(\boldsymbol{a})$ とすれば，$\mathcal{L}(\boldsymbol{a})$ 上には

$$\varphi_a(\pi_l(\xi)^*\pi_l(\xi)) = \begin{cases} \|\xi\|^2 & (\xi \in \boldsymbol{a}'') \\ \infty & (\xi \notin \boldsymbol{a}'') \end{cases}$$

により定まる半有限，忠実，正規荷重 φ_a が存在する．ただし，$\boldsymbol{a}''$ は $\boldsymbol{a}$ をノルム

$$\xi \mapsto \|\pi_l(\xi)\| + \|\xi\| + \|\xi^\#\|$$

により完備化して得られる左ヒルベルト環である．

定理 4　(i)　フォン・ノイマン環 M 上の半有限，忠実，正規荷重 φ から作られる左ヒルベルト環を $\boldsymbol{a}_\varphi$ とすれば，M から $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_\varphi)$ への全射 * 同型写像 π で $\varphi = \varphi_{\boldsymbol{a}_\varphi} \circ \pi$ をみたすものが存在する．

(ii)　左ヒルベルト環 $\boldsymbol{a}$ から得られるフォン・ノイマン環 $\mathcal{L}(\boldsymbol{a})$ と半有限，忠実，正規荷重 φ_a を用いて，左ヒルベルト環 $\boldsymbol{a}_{\varphi_a}$ を作ると $\boldsymbol{a}''$ から $\boldsymbol{a}_{\varphi_a}$ への対合を保存する全射同型写像が存在する．◇

先にも述べたように，ヴォロノヴィッツ環の双対性に関する議論を，さまざまな左ヒルベルト環に関する議論へ帰着させて，話を進める．最初は，フォン・ノイマン環 $\widehat{M}$ とその上のハール荷重を導くような左ヒルベルト環を，フォン・ノイマン環 M の前双対空間 M_* の稠密部分多元環として作らなければならない．しかも，この集合はユニタリ余逆写像 $\widehat{R}$ や変形自己同型 $\{\hat{\tau}_t\}$ により保存されている必要があるために，周到な準備を必要とする．

再び，一般論に戻ろう．いま，左ヒルベルト環 $\boldsymbol{a}_\varphi$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathscr{H}_\varphi$ とする．左ヒルベルト環の定義の条件 (iv) により，写像 : $\xi \to \xi^\#$ は可閉であるから，$\mathscr{H}_\varphi$ 上でのその閉拡大を $S = S_\varphi$ とし，その極分解を $J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}$ とする．$J = J_\varphi$, $\Delta = \Delta_\varphi$ はそれぞれ **モジュラー共役作用素**，**モジュラー作用素** と呼ばれている．これらの作用素を用いると，次の冨田の定理が得られる．

定理5　(i)　フォン・ノイマン環 M とその上の半有限，忠実，正規荷重 φ に対し，$\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$ を GNS 構成法により得られる巡回表現とすれば，

$$\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x)) = \Delta^{it}\pi_\varphi(x)\Delta^{-it}, \qquad x \in M$$

をみたす1径数＊自己同型群 $\{\sigma_t^\varphi\}$ が存在する．

(ii)　$J\pi_\varphi(M)J = \pi_\varphi(M)'$.　◇

ここで得られた1径数＊自己同型群 $\{\sigma_t^\varphi\}$ は**モジュラー自己同型**と呼ばれ，冨田‐竹崎理論の中で中心的役割を果している．

ハール荷重 h に関するモジュラー共役作用素を用いると，$\widehat{M}$ のユニタリ余逆写像は $\widehat{R}(x) = J_h x^* J_h$ と表せる．また，変形自己同型 $\{\tau_t\}$ はハール荷重を保存していたので，巡回表現上に，それを導く1径数ユニタリ群 $\{H^{it}\}$ が存在する．ただし，H は正自己随伴作用素である．これを用いると，$\widehat{M}$ の変形自己同型 $\{\widehat{\tau}_t\}$ も $\widehat{\tau}_t(x) = H^{it}xH^{-it}$ と表せる．前双対空間 M_* から作られる左ヒルベルト環から，$\widehat{M}$ 上のハール荷重が定まる．このようにして双対ヴォロノヴィッツ環 $(\widehat{M}, \widehat{\delta}, \widehat{R}, \widehat{\tau}, \widehat{h})$ が得られる．さらに，その双対を考えると，もとのヴォロノヴィッツ環と全射＊同型になることがわかり，双対定理の証明が完成する．詳細は [6] を参照していただきたい．

参考文献

[1]　C. Chevalley, *Theory of Lie Groups, I*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1946.

[2]　M. Enock and J.-M. Schwartz, Une dualité dans les algèbre de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France, Suppl. Memoir* **44** (1975), 1 − 144.

[3]　P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localment compact, *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), 181 − 236.

[4]　M. G. Krein, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **69** (1949), 725 − 728.

[5]　T. Masuda and Y. Nakagami, An operator algebraic framework for the duality of the quantum groups, *Mathematical Physics X*, Proc. AMP-91, Univ. Leipzig, 1991, edited by K. Schmüdgen, 291 − 295, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York.

[6]　T. Masuda and Y. Nakagami, A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, to appear.

[7] T. Masuda, Y. Nakagami and J. Watanabe, Non commutative differential geometry on the quantum *SU*(2), I: an algebraic viewpoint, *K-theory* **4** (1990), 157 – 180.

[8] P. Podleś and S. Woronowicz, Quantum deformation of Lorentz group, *Commun. Math. Phys.* **130** (1990), 381 – 431.

[9] L. S. Pontrjagin, *Topological Groups*, 2nd ed., Moscow, 1954. (柴岡・杉浦・宮崎訳：連続群論，上，下，岩波書店，1957, 1958)

[10] W. F. Steinspring, Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1959), 15 – 56.

[11] M. Takesaki, *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, Lecture Notes in Math. **128** (1970), 1 – 123, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York.

[12] M. Takesaki, Duality and von Neumann Algebras, *Lectures on Operator Algebras*, Lecture Notes in Math. **247** (1972), 665 – 779, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[13] T. Tannaka, Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, *Tôhoku Math. J.* **45** (1939), 1 – 12.

[14] N. Tastuuma, A duality theorem for lacally compact groups, *J. Math. Kyoto Univ.* **6** (1967), 187 – 293.

[15] A. Van Daele, The Haar measure on a compact quantum group, preprint.

[16] S. Woronowicz, Twisted *SU*(2) group. An example of a non-commutative differential calculus, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **23** (1987), 117 – 181.

[17] S. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987), 613 – 665.

[18] S. Woronowicz, Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted *SU*(*N*) groups, *Invent. Math.* **93** (1988), 35 – 76.

第10話

拘束系の力学とホモロジー

村井信行

1° はじめに

着目する力学系において，最初にあたえられている力学変数の数（見かけ上の運動自由度）が，新たにあたえられた条件や系のもつ対称性などによって減ることがある；つまり実質的な自由度が減少する．このような系を **拘束系** という．全般的な解説書として［1］がある．

例1　3次元空間内で一様な重力場の中を運動する質点を考えよう．ただし質点は半径 a の球殻に拘束されているとする．空間座標を (q^1, q^2, q^3) とかく；見かけの自由度は3である．拘束条件は，球の中心を原点として，

$$f(q^1, q^2, q^3) = (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 - (a)^2 = 0$$

である；条件の数は一つなので，実質的な自由度は2となる．オイラー-ラグランジュ（Euler-Lagrange）の運動方程式は，ラグランジュ乗数をもちいた条件つき変分法によって求めることができる．

例2　一般相対性理論や素粒子の内部対称性など対称性変換のパラメタ（助変数）が時空間の座標による場合がある．このような対称性をゲージ対称性（gauge symmetry）ともいう．この解説では，この種の対称性により自由度が減る拘束系に限ってのべる．最も簡単な電磁場では，物質場を表す複素数関数の位相のずれがその対称性変換である．ヤン-ミルズ（Yang-Mills）場ではアイソスピン空間における回転がその対称性変換である．この解説における力学の枠組みを説明したあとで，他の物質場がないときの電磁場の系とヤン-ミルズ場の系を例3～6にしめす．

◆ハミルトン（Hamilton）形式◆

広義座標，運動量をそれぞれ q^i, p_i $(i = 1, \cdots, N)$ とかき，拘束条件を

$$\Phi_\alpha(q, p) = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, M) \tag{1.1}$$

としてハミルトニアンを H_{cl} としたとき，ポアソン括弧 $\{\, ,\}$ に関して閉じた代数関係として

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = U_{\alpha\beta}^{\gamma}(q, p)\Phi_\gamma \tag{1.2 a}$$

$$\{H_{cl}, \Phi_\alpha\} = V_\alpha{}^\beta(q, p)\Phi_\beta \tag{1.2 b}$$

がえられる；$U_{\alpha\beta}^{\gamma}$ を構造関数という．ただし，くりかえされた添字（ここでは β, γ）は，とくに断らない限り和をとる．上の関係をみたすものを第1種の拘束条件という．もしも（1.2 a）の右辺が定数か添字だけによるならば，第2種とよぶ．例1をハミルトン形式でかけば，その例となる．

作用積分 S_0 は拘束条件をラグランジュ乗数項として含む拡張ハミルトニアン

$$H_E = H_{cl} + \lambda^\alpha \Phi_\alpha \tag{1.3}$$

と次の関係にある；ラグランジアンを L として，

$$S_0[q, p, \lambda] := \int_{t_I}^{t_F} L\,dt := \int_{t_I}^{t_F} (p_i \dot{q}^i - H_E)\,dt. \tag{1.4}$$

任意の力学関数 $F(q, p)$ について Φ_α によって引き起こされる微小変換 δ_ε は

$$\delta_\varepsilon F = \{F, \varepsilon^\alpha \Phi_\alpha\} \tag{1.5}$$

で定義される；パラメタ ε^α は微小であり，一般には時間の関数でもありうる．また3次元空間の座標の関数でもありうる；このとき添字についての和は離散的添字についての和と座標についての積分も意味する；すぐ下にのべる電磁場の例が参考になる．このような省略した書き方を DeWitt の縮約という．上の微小変換（1.5）について作用積分（1.4）が擬不変 $\delta_\varepsilon S_0 + \int_{t_I}^{t_F} d\Lambda/dt \cdot dt = 0$ とすると，λ^α に対して次の変換性が要求される；

$$\delta_\varepsilon \lambda^\alpha = \dot{\varepsilon}^\alpha + \lambda^\gamma \varepsilon^\beta U_{\beta\gamma}^{\alpha} - \varepsilon^\beta V_\beta{}^\alpha.$$

ただし $V_\beta{}^\alpha$, $U_{\beta\gamma}^{\alpha}$ は（1.2）であたえられる．

例3　電磁場の場合に具体的に計算すると理解しやすい．場の強さはベクトル・ポテンシャル A_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の関係にある．ラグラン

ジアン密度は，

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}((E_i)^2+(B_i)^2) - E_i\partial_iA_0. \qquad (1.6)$$

ただし $B_i=\varepsilon^{ijk}F_{jk}$ $(i, j, k=1, 2, 3)$，あるいは $F_{ij}=\varepsilon_{ijk}B_k$；ここで ε^{ijk} は反対称擬テンソルで $\varepsilon^{123}=1$ である．式 (1.4) と (1.6) とを比べて，広義座標として $A_i(\boldsymbol{x})$ を採用すると，運動量は $E_i(\boldsymbol{x})$ である．ラグランジュ乗数を A_0 として，部分積分によって次の拘束条件をえる；

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -\partial_iE_i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

構造関数などは，$U_{\alpha\beta}^{\gamma}=0$，$V_{\alpha}^{\beta}=0$ である．

例4　ヤン－ミルズ場の強さは，ベクトル・ポテンシャル A_μ^a $(1\leq a\leq M)$ に関係式 $F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+gf_{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$ で結ばれている．構造関数 $U_{\alpha\beta}^{\gamma}$ は定数のとき $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ とかき，ここでは $C_{\alpha\beta}^{\gamma}=-gf_{\alpha\beta\gamma}$ なる関係にある；g は結合定数である．ラグランジアン密度は次の形である；必要なら部分積分して

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu} = E_i^a\dot{A}_i^a - \frac{1}{2}((E_i^a)^2+(B_i^a)^2) - (\nabla_iE_i)^a\cdot A_0^a.$$

ただし E_i^a, B_i^a は電磁場と同様の定義に従う．また ∇_μ は共変微分である．ラグランジュ乗数 A_0^a に対応して拘束条件は次の形である；

$$\Phi_a := -\nabla_iE_i^a = -(\partial_iE_i^a+gf_{\alpha\beta\gamma}A_i^\beta E_i^\gamma) = 0.$$

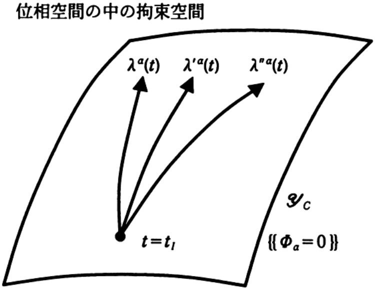


図1　ハミルトン形式における等価な複数の軌道（異なる $\lambda^a(t)$ に対応）

ハミルトン形式の運動を概念的に図1にしめした．q^i, p_i ($1 \le i \le N$) の構成する位相空間の中を拘束条件 $\Phi_a(q, p) = 0$ ($1 \le \alpha \le M$) をみたす拘束空間（図1に曲面 $\mathscr{Y}_C$ でしめしたもの）を軌道は動く．第1の力学的手続きとしてこのようにM個の拘束条件を課すという操作をする；自由度は $2N$ から $2N-M$ に減ると考えられる．しかしハミルトニアン H_E には λ^a の任意性がある (1.3)．この λ^a の選び方に対応して，いろいろな軌道が得られる．これらの軌道はどれを選んでもよいという意味で等価であり，第2の力学的手続きとしてその一つを選ぶ；初歩の力学の処方では，λ^a が q, p によるとして，拘束条件と同じ数の適当な[注)]条件 $\chi^a(q, p) = 0$ ($1 \le \alpha \le M$) を新たに課す．これをゲージ固定とよぶ．これによって自由度は $2N-M-M = 2N-2M$ に減ると考えられる．基本的に二つの力学的手続きを必要とすることに留意しよう．

◆ラグランジュ形式◆

ハミルトン形式と概念的には同様である．広義座標 q^i ($1 \le i \le N$) の構成する空間の中の軌道が次の運動方程式に従う；$\delta/\delta q^i$ を変分として

$$L_{q^i} := \frac{\delta S_0}{\delta q^i} = \widetilde{V}_i(q, \partial_\mu q) - (\partial_\mu \partial_\nu q^k)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^k)\,\partial(\partial_\nu q^i)}\right)$$

$$= V_i(q, \dot{q}) - \ddot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = 0. \tag{1.7}$$

ゲージ対称性がある場合，添字 $i \equiv (i, x)$ と考えられる；ここで x は時空間の座標の組である．Noetherの定理から導かれる結論として，行列 $\|\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k\|$ は特異である．したがって $q, \dot{q}$ によって $\ddot{q}$ は一意的に表せないので，軌道に任意性が生ずる．第1の力学的手続きは，任意性があっても可能な古典的な軌道を見いだすことである．これらの軌道は等価であって，その一つを選ぶことになる；これが第2の力学的手続きである．

ラグランジュ形式のゲージ変換を次の一般形で記す；

$$\delta_\varepsilon q^i = \mathscr{R}^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha. \tag{1.8}$$

注） 行列 $\|\{\chi^a, \Phi_\beta\}\|$ が特異でないという条件では λ^a が $\dot{\chi}^a = \{\chi^a, H_E\} = 0$ からきまる．

例5　電磁場の場合は，Dirac のデルタ関数をつかい，次の形で表す；

$$\delta_\varepsilon A_\mu(x) = \partial_\mu \varepsilon(x) = \int \frac{-\partial \delta^4(x-y)}{\partial y^\mu} \cdot \varepsilon(y)\, d^4 y .$$

例6　ヤン-ミルズ場では次の形をもつ；

$$\delta_\varepsilon A_\mu^\alpha(x) = \partial_\mu \varepsilon^\alpha(x) + g f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta \varepsilon^\gamma(x) .$$

オイラー-ラグランジュ運動方程式の縮退は，Noetherの定理によって次の一般化された縮約 Bianchi 恒等式に表現される；

$$L_{q^i} \mathscr{R}^i_\alpha = 0. \tag{1.9}$$

上式より変換（1.8）はオイラー導関数 L_{q^i} に比例する項が付加されてもよい．これを開いたゲージ変換という；

$$\delta_\varepsilon q^i = \mathscr{R}^i_\alpha \varepsilon^\alpha + M^{ik}(\varepsilon) L_{q^k}, \qquad M^{ik} = -M^{ki}. \tag{1.10}$$

◆外積代数とホモロジー◆

実数 $\boldsymbol{R}$（または複素数 $\boldsymbol{C}$）の上のベクトル空間 V の元 $\xi, \eta, \cdots$ の形式的な積を導入して，その多項式全体をテンソル空間とよぶ．空間 V には双一次形式 $\mathscr{B}$ が備わっているとき，新たな計算規則 $(\xi)^2 = \mathscr{B}(\xi, \xi)$ を課す．とくに $\mathscr{B} \equiv 0$ という簡単な場合には

$$\xi\eta + \eta\xi = 0, \qquad (\xi)^2 = 0$$

となる；または，反可換な積 $\wedge$ をもちいて，$\xi \wedge \eta + \eta \wedge \xi = 0$ などとかく．このテンソル空間を**外積代数**または**グラスマン**（Grassmann）**代数**といい，$\Lambda^{(*)}V$ とかく．部分空間で n 次の多項式全体を $\Lambda^n V$ と記す；とくに $\Lambda^0 V = \boldsymbol{R}$（または $\boldsymbol{C}$），$\Lambda^1 V = V$ である．

例として de Rham 複体についてのべる；力学や電磁気学につかうベクトル解析の初歩にも現れる．実数 $\boldsymbol{R}$ の代わりに $\boldsymbol{R}^n := \{\!\{ x_1, x_2, \cdots, x_n \}\!\}$ 注) の領域 $\mathscr{D}$ 上の必要なだけ微分可能な（C^∞-）実数値関数全体を考える．ベクトル空間 V として基底 $\{\!\{ dx_1, dx_2, \cdots, dx_n \}\!\}$ で張られる空間をとる．関数 $f(x)$（$\in \Lambda^0 V$）について**外微分**（exterior derivative）とよばれる作用素 d を

注）普通の集まりの記号 { } はポアソン括弧につかうので，ここでは {{ }} を採用した．

$$df := \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

で定義する．空間 $\Lambda^1 V$ の元 $\omega = f^i(x) dx^i$ については次の定義である；

$$d\omega := df^i(x) \wedge dx^i.$$

順次 $d: \Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V$ を定義する；d は次数 k を一つふやす．一般的枠組みでは d は **双対境界作用素**（coboundary operator）とよばれる．

3次元空間では $f \in \Lambda^0 V$, $\omega \in \Lambda^1 V$, $\alpha := \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} \alpha^i dx^j \wedge dx^k$ に対して df には $\mathrm{grad} f$, $d\omega$ には $\mathrm{rot}(f^1, f^2, f^3)$, $d\alpha$ には $\mathrm{div}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ が対応する；dx^i などにかかる係数を計算すればわかる．

重要な性質として d のベキ零性がある；

$$(d)^2 = 0.$$

2回偏微分の可換性 $\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}$ と反可換性 $dx^i \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^i$ によってあきらかである．もう一つの大切な性質は次にしめす符号つきのライプニッツの規則をみたすことである；$\alpha \in \Lambda^k V$, $\beta \in \Lambda^l V$ について

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\nu(\alpha)} \alpha \wedge d\beta.$$

ただし $\nu(\alpha)$ は α の **グラスマン偶奇性**（パリティ）とよばれ，この場合 $\nu(\alpha) = k \pmod 2$ である．この解説を通じて，ベキ零で符号つきのライプニッツの規則を満足する作用素がたいへん重要な役割をもっている．部分空間 $\Lambda^k V$ の列に次の図式がなりたつ；

$$0 \xrightarrow{d} \Lambda^0 V \xrightarrow{d} \Lambda^1 V \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^k V \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1} V \xrightarrow{d} \cdots.$$

全体の空間 $\Lambda^{(*)} V$ を **de Rham 複体** という．

ベキ零性から $\Lambda^k V$ における d の核（kernel）

$$\mathrm{Ker}\, d(\Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V) := \{\!\{ \omega \in \Lambda^k V \mid d\omega = 0 \}\!\}$$

と像（image）

$$\mathrm{Im}\, d(\Lambda^{k-1} V \to \Lambda^k V) := \{\!\{ \omega \in \Lambda^k V \mid \omega = d\alpha,\ \alpha \in \Lambda^{k-1} V \}\!\}$$

を比べると，核のほうが像を含む；$\mathrm{Im}\,d \subseteq \mathrm{Ker}\,d$．核の元，つまり $d\omega = 0$ なる ω を閉じている（closed）という．商空間

$$H^k(d; \Lambda^{(*)}V) := \frac{\mathrm{Ker}\,d(\Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V)}{\mathrm{Im}\,d(\Lambda^{k-1} V \to \Lambda^k V)}$$

が自明に 0 ならば，$\mathrm{Ker}\,d$ $(= \mathrm{Im}\,d)$ の元は完全（exact）であるという．この商空間を**コホモロジー群**（cohomology group）とよぶ；群とは加法についてである．

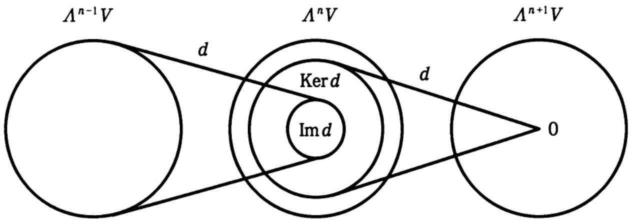


図2　図式 $\Lambda^{n-1}V \to \Lambda^n V \to \Lambda^{n+1}V$

初等力学での例をみよう．力 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ の任意の経路についての線積分が同じ値をあたえるならば，つまり $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = 0$ ならば，ポテンシャル U があって，$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\,U$ とかける．いいかえると，$\omega = F_i dx^i$ が $d\omega = 0$ ならば，$\omega = dU$ なる U がある．これを少し拡張すると，領域 $\mathfrak{D}$ が $\boldsymbol{R}^n$ であるとき，$\omega \in \Lambda^k V$ $(k \geq 1)$ が $d\omega = 0$ ならば，$\omega = d\alpha$ なる $\alpha \in \Lambda^{k-1}$ があることが知られている [2]．例外は $k = 0$ のときで，$d: 0 \to 0 \in \Lambda^0 V$ と関数が定数値の場合は実数全体と同じと考えられる；$\mathrm{Ker}\,d(\Lambda^0 V \to \Lambda^1 V) = \boldsymbol{R}$ である．したがって $H^0(d) = \boldsymbol{R}$, $H^k(d) = 0$ $(k \geq 1)$ である．このようにして $\boldsymbol{R}^n$ のコホモロジー的な構造をしらべることができる．

この解説を通じて，上でのべた de Rahm コホモロジーの初歩と同様の手法を拘束系の力学に適用しようとする．力学変数の空間の性質をその上で定義された力学関数の複体を構成して，種々の（双対）境界作用素の（コ）ホモロジー群をもとめることによって，力学関数の空間をしらべる．このことが間接的に

力学変数の空間をしらべることになるのである．類推のときに注意することを二つつけ加える．(1) 外微分 d と類似の作用によって次数が一つずつ減る場合もあり，この作用素を境界作用素 (boundary operator) とよび，コホモロジーの代わりにホモロジーという用語をつかう；初歩の知識のためにテキスト [3] がある．(2) 外微分 d は左から作用させると考えているけれども，あとでは右から作用させるように定義したいろいろな (双対) 境界作用素をつかう；もちろん，全部，左からの作用として定義することもできる．

この解説で紹介する方法は，古典論では一つの完結した処方をあたえる；これを **古典論的 BRST** (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) **コホモロジーの処方** とよぶ．完結した古典論を土台として量子論を定式化することになる．ヤン-ミルズ場については，この古典論を経路積分によって量子化すると，それまでの重要な結果である Faddeev 表示，Faddeev-Popov 表示，ガウス平均表示などが得られる；この解説でのべる手法が強力であることをしめしている．

◆歴史と発展◆

ヤン-ミルズ場の量子化とくりこみ操作に関係して，Becchi-Rouet-Stora [4] と Tyutin [5] が，ゲージ固定して本来の対称性が見かけの上でなくなったあとにも，ある超対称性 (supersymmetry) があることを見いだした；これを BRST 変換という．超対称性とは力学変数の微小変換がグラスマン偶奇性を変える変換である．この解説は古典論に留まるけれども，もともと量子化と関連して現れた考え方なので常に量子化を念頭においている；量子化の準備としての完結した古典論というべきだろう．BRST 変換に基づく定式化はラグランジュ形式において九後，小嶋，中西らを中心として大いに発展し整備された [6], [7]．ハミルトン形式においても Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) の定式化 [8], [9] が構築された．ハミルトン形式の古典論的 BRST コホモロジーが，ここでのべる形となって現れたのは 1986～1987 年であった；なかでも Browning-McMullan の論文 [10] と Kostant-Sternberg の論文 [11] が筆者には印象的であった．(A) ハミルトン形式の BRST 変換という双対境界作用素が，最も簡単な拘束系の場合には二つの (双対) 境界作用素に分解され

る；その二つの作用素は図1の説明でのべた二つの力学的意味にそれぞれ対応する．力学関数全体はその二つの作用素によって2重複体をなす．さらに一般的な拘束系については，その2重複体を基本としてホモロジー摂動論（homological perturbation theory）を適用する．(B) 力学関数のうち物理的に意味のある関数を選びだすには，ホモロジー代数学のスペクトル系列（spectral sequence）の理論（たとえばテキスト［12］参照）がつかわれる．この二つのこと (A)，(B) は Henneaux［13］による BFV 定式化の紹介にすでに内在していたけれども，文献［10],［11］の読みやすさもあって，以後，数学と物理学の研究者の協力により理解が深められた［14]．ホモロジー摂動論は数学と物理学で独立に導入されたと思われ，興味深い．一方において，ラグランジュ形式の拘束系力学にも数理 (A)，(B) が潜んでいることが見いだされた．くりこみ操作に関連した Zinn-Justin 方程式［15］から出発して進展しつつあった Batalin-Vilkovisky の場・反場による定式化［16］も数理的には同じ構造をもつことがわかってきた［17]．このようにして，いわゆる BRST 定式化のハミルトン形式とラグランジュ形式に共通する数理的な構造があきらかになったのである．

現在では私の知る限り，拘束系の力学としては，これらの数理 (A)，(B) は，力学変数が（局所的な正準変換で移り変わることは許される）一群の局所座標系に限られているときに有効である；一般的な解析力学の座標系によらない枠組み（たとえばテキスト［2］参照）では理論が完全には展開されていない．したがって，これらの数理の幾何学的な側面［18］～［21］と，ラグランジュ形式とハミルトン形式との等価性［22],［23］の幾何学的側面は，現在，研究が進んでいる途中である．拘束系の力学のより高い完成が望まれる．

この解説の内容について，［24],［25］に，より詳しくのべてある．

2° ゲージ対称性をもつ拘束系の基本型

電磁場やヤン-ミルズ場のように（コ）ホモロジーの観点からみて最も簡単な拘束系についてその構造をしめす．

2.1 Koszul - Tate 境界作用素

図1で説明した二つの手続きの一つ，拘束条件（または運動方程式）を課することをホモロジーのことばでのべよう．ハミルトン形式とラグランジュ形式を同時に説明するために，力学変数を $y_1, y_2, \cdots, y_J$ として，その空間を $\mathscr{Y}$ とかく．条件（1.1），（1.7）のような課すべき独立な条件を次のようにかく；

$$f_\alpha(y) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, K). \tag{2.1}$$

上の条件から $J-K$ 個の独立変数が選びだせればよいが，着目する拘束系についてすべての計算が見通しよくできる選び方があるとは限らない．それゆえ力学関数に注目するのである．簡単のため f_α はグラスマン偶とするが，偶奇が混在しても以下と同様の議論がなりたつ．基底 $\{\!\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_K\}\!\}$ で張られる $\boldsymbol{R}$（または $\boldsymbol{C}$）の上のベクトル空間を $\mathscr{V}$ とする．これから 1° 節と同様に外積代数を構成し，さらに係数として必要なだけ微分（変分）可能な C^∞-力学関数をも許す；

$$\Lambda^l\mathscr{V} := \{\!\{\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\wedge\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\alpha_l}h^{\alpha_l\cdots\alpha_2\alpha_1}(y)\}\!\}, \tag{2.2 a}$$

$$\Lambda^{(*)}\mathscr{V} := \bigoplus_{l=0}^{\infty}\Lambda^l\mathscr{V}. \tag{2.2 b}$$

最初にあたえられた力学変数 q, p または q に加えて $\{\!\{\boldsymbol{e}_\alpha\}\!\}$ を力学変数とみなすけれども，区別のためにハミルトン形式では反ゴースト，ラグランジュ形式では反場とよぶ．よび方が違うのは両形式で対応する変数が異なるグラスマン偶奇性をもつからである．これらを広い意味でゴースト変数とよぶこともある．

次の作用素 δ_K は $\Lambda^l\mathscr{V}$ から $\Lambda^{l-1}\mathscr{V}$ へ次数を一つだけ下げる；

$$\delta_K := \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\boldsymbol{e}_\alpha}\cdot f_\alpha. \tag{2.3}$$

つまり，式（2.2 a）の $\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\alpha_l}$ の中の各々の $\boldsymbol{e}_\alpha$ を右から一つずつ f_α でおきかえて和をとる演算である；ただし符号に注意する．とくに $\Lambda^0\mathscr{V}$ は C^∞ である力学関数であり，$\delta_K\colon\Lambda^0\mathscr{V}\to 0$ となる．この作用素がベキ零であることは，係数の隣りあう添字についての反可換性 $h^{\cdots\alpha\beta\cdots} = -h^{\cdots\beta\alpha\cdots}$ によってあきらかである；

$$(\delta_K)^2 = 0. \tag{2.4}$$

この δ_K を **Koszul-Tate 境界作用素** とよぶ.「Tate の工夫」をあとで含めることを考慮して Tate の名もつけた.

ホモロジーの手法を拘束条件を課することに適用するには，次のことをしらべる；力学関数の部分空間 $\Lambda^l\mathscr{V}$ の元 F が δ_K で閉じている $\delta_K F=0$ ならば，完全であるかどうかである．完全とは，ある $F_1\in\Lambda^{l+1}\mathscr{V}$ があって，$F=\delta_K F_1$ がなりたつことである．拘束条件 (2.1) が独立ならば，ある適当な条件のもとでは $l=0$ の場合を除いて，$\mathscr{Y}$ の中の条件 (2.1) を課した部分空間 $\mathscr{Y}_C$ の近傍でなりたつことがわかる [13]．それゆえ $\Lambda^l\mathscr{V}$ $(l\neq 0)$ においては像 $\mathrm{Im}\,\delta_K$ と核 $\mathrm{Ker}\delta_K$ は一致し，次の商空間は自明 (0) になる；

$$H_l(\delta_K;\Lambda^{(*)}\mathscr{V}):=\frac{\mathrm{Ker}\,\delta_K(\Lambda^{l+1}\to\Lambda^l\mathscr{V})}{\mathrm{Im}\,\delta_K(\Lambda^l\mathscr{V}\to\Lambda^{l-1}\mathscr{V})}=0\qquad(l\neq 0).\tag{2.5}$$

除外されていた $l=0$ の場合は，$\mathrm{Ker}\delta_K=\Lambda^0\mathscr{V}$，つまり力学関数全体であり，像は条件 (2.1) の線形結合で係数が任意の C^∞ の力学関数であることがわかる．その係数を $a^\beta(y)$ としるすと，ホモロジー群をとる操作

$$H_0(\delta_K;\Lambda^{(*)}\mathscr{V}):=\frac{\{\!\{\text{力学関数}\}\!\}}{\{\!\{a^\beta(y)f_\beta(y)\}\!\}}\tag{2.6}$$

により，変数についての部分空間 $\mathscr{Y}_C$ において自明でない関数全体を選びだすことができる.

表1　両形式の「拘束条件」を対照する.

力学形式	変数 $\{\!\{y_i\}\!\}$	変数の数 J	条件 $\{\!\{f_a\}\!\}$	条件数 K
ハミルトン形式	$\{\!\{q^i,p_i\}\!\}$	$2N$	$\Phi_\alpha(q,p)$	M
ラグランジュ形式	$\{\!\{q^i\}\!\}$	N	$-L_{q^i}$	N

表2　Koszul-Tate 境界作用素 δ_K に関する記号を対照する.

力学形式	ベクトル空間 $\mathscr{V}$	基底 e_a	部分空間 $\Lambda^0\mathscr{V}$
ハミルトン形式	ゲージ・リー代数 $\mathfrak{g}$	$\overline{\wp}_\alpha$	q,p の関数全体 $\mathscr{F}_0^0$
ラグランジュ形式	$\{\!\{q_i^*\}\!\}$ の張る空間	q_i^*	q の汎関数全体 $\mathscr{C}_0^0$

表1, 2にあるようにハミルトン形式ではベクトル空間 $\mathscr{V}$ としてゲージ化されたリー代数 $\mathfrak{g}$ が採用される；その基底は文献 [8] に従って $e_a = \overline{\wp}_a$ とかく．課す条件 (2.1) は拘束条件 (1.1) であり，式 (2.6) より，$H_0(\delta_K)$ は位相空間の中の拘束条件 $\{\!\{\Phi_a(q, p) = 0\}\!\}$ をみたす拘束部分空間上の自明でない関数全体を表す．例3, 4に適用してみるとよい．

表1, 2を説明すると，ラグランジュ形式では e_a などは，広義座標 q^i に対応する反場 (anti-field) とよばれる力学変数 q_i^* を導入して，これらを基底とするベクトル空間を $\mathscr{V}$ として採用する．類推として，広義座標が多様体をなすとするならば，その接ベクトル空間が $\mathscr{V}$ に相当すると推定される [18]．課す条件 (2.1) はオイラー‐ラグランジュ運動方程式 (1.7) である (表1の負の符号は慣用)．したがって $H_0(\delta_K)$ (2.6) は古典論的な軌道の上で定義された汎関数全体となる．ラグランジュ形式の場合はゲージ対称性がない場合でも，この解説の手法が適用できることに留意しよう：ハミルトン形式では運動方程式はホモロジー的手法とは別にあたえられる．

◆Tate の工夫◆

課した条件 (2.1) が一次独立でないとき，可約な条件という (一次独立である場合は既約な条件とよぶ)．拘束部分空間 $\mathscr{S}_C$ の上で恒等的に 0 でない係数 z_A^a $(1 \leq A \leq L < K)$ があって，恒等的に L 個の関係式

$$z_A^a f_a = 0 \tag{2.7}$$

がある．この場合には $\Lambda^1\mathscr{V}$ の元 $z_A^a e_a$ は核 $\mathrm{Ker}\,\delta_K$ に属する；$\delta_K(z_A^a e_a) = z_A^a f_a = 0$．しかし $\Lambda^2\mathscr{V}$ の元に δ_K を作用させてつくることはできない．つまり，$H_1(\delta_K) \neq 0$ である；L 個の元 $z_A^a e_a$ は δ_K について閉じているが，完全ではない．

上の可約性からきた問題に対して「Tate の工夫」という手続きをとる．部分空間 $\Lambda^2\mathscr{V}$ を拡大して，次の関係をみたす新しい変数 f_A $(1 \leq A \leq L)$ を導入することによって，$\Lambda^1\mathscr{V}$ において $\mathrm{Im}\,\delta_K = \mathrm{Ker}\,\delta_K$ がなりたつようにする；

$$\delta_K f_A := z_A^a e_a.$$

したがって再び (2.5) がなりたつ．さらに可約の条件 (2.7) の係数 z_A^a が一次独立でない場合は，同様の手続きをくりかえすのである．標語的にゴーストの

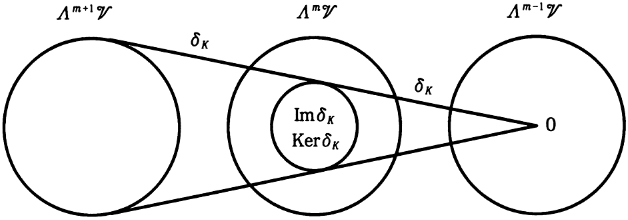


図3 a　完全な図式 $\Lambda^{m+1}\mathscr{V}\to\Lambda^{m}\mathscr{V}\to\Lambda^{m-1}\mathscr{V}$

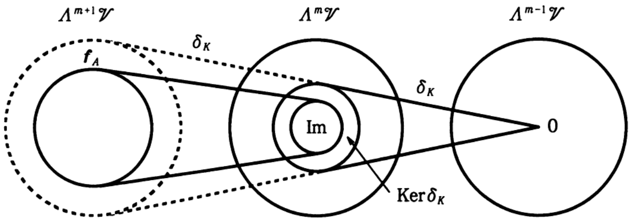


図3 b　図式 $\Lambda^{m+1}\mathscr{V}\to\Lambda^{m}\mathscr{V}\to\Lambda^{m-1}\mathscr{V}$

ゴーストの … ともいえよう．

以上のより一次独立な条件を課すという操作，または縮退した条件を課すという操作がホモロジーのことばでどのように表されるかが，理解できたとおもう．拘束条件がグラスマン奇であっても定式化はうまくいくことがわかっている．

表3に力学形式別に記号の意味をしめす．ハミルトン形式では，「Tate の工夫」は可約なゲージ対称性をあつかう手法となる；例として反対称テンソル場

表3　両力学形式の可約な「拘束条件」を対照する．

力学形式	係数 z_A^a	可約性の数 L	新変数 f_A
ハミルトン形式	z_A^a	L	μ_A
ラグランジュ形式	$\mathcal{R}_\alpha^i$	M	c_α^*

がある．必要なだけ拡大された力学関数の空間を $\Lambda^m\mathscr{V}$ の代わりに $\mathscr{F}^0_m$ と記す．それに対し，ラグランジュ形式では，「Tate の工夫」はゲージ対称性そのものをあつかう方法となる．一般化された縮約 Bianchi 恒等式 (1.9) は運動方程式の一次従属をしめしている．新しい変数 $\{f_A\}$ はゲージ化されたリー代数の基底 $\{c^*_\alpha(x)\}$ である；これらは Faddeev-Popov ゴーストに対応する反場とよばれる．必要なだけ拡大された力学関数の空間は $\Lambda^m\mathscr{V}$ の代わりに $\mathscr{C}^0_m$ と記す．

2.2　双対境界作用素 d_G

この作用素は図1にしめした多くの軌道から一つを選びだすことに対応するが，ここではもっと抽象的な処方がとられる；拘束条件をみたす関数のうちから，さらに対称性に関して不変な力学関数を選びだすことになる．この操作をホモロジーのことばで表すことが，この小節の主題である．この節の議論は，Koszul-Tate 境界作用素と違い，二つの力学形式で同様にできるので，ハミルトン形式でのべたあとで，ラグランジュ形式の場合はどの点が異なるだけなのかを注意しよう．

ゲージ対称性の変換はハミルトン形式では，(1.5) であたえられる．変換の微小なパラメタ ε^α $(1 \leq \alpha \leq M)$ をゲージ化されたリー代数 $\mathfrak{g}$ の単位元の近傍の元 X の成分と考える；これは，ここでは説明しないが，パラメタ ε の意味でもあった．ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の基底を $\overline{\wp}_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq M)$ とすると，$X := \varepsilon^\alpha \overline{\wp}_\alpha$ とかける；表4にそれぞれの力学形式における記号をしめす．ハミルトン形式におけるゲージ変換 (1.5) を力学関数から関数への写像に X を対応させるものと考えるのである；言いかえればリー代数 $\mathfrak{g}$ の $\mathscr{F}^0_0$ 上の準同形写像への表現 ρ とみなす．双対基底を $\{c^\alpha\}$ とすると，

$$c^\alpha(\overline{\wp}_\beta) = \delta^\alpha_\beta .$$

これらの $\{c^\alpha(x)\}$ を力学変数とみなして，Faddeev-Popov ゴーストとよぶ．これをつかって表現 ρ を

$$f\overleftarrow{\rho}\,(X) := \{f, \Phi_\alpha\} c^\alpha(X) = \{f, \Phi_\alpha\}\varepsilon^\alpha$$

で定義する．リー代数の交換関係

$$[\overline{\wp}_\alpha, \overline{\wp}_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \overline{\wp}_\gamma \tag{2.8}$$

がポアソン括弧 $\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi_\gamma$ へ ρ によって写されることは Jacobi の恒等式によってわかる．

全力学関数から不変部分空間をホモロジー的な手法で引き出すことを考える；このときつかう作用素 d_G は $\mathscr{F}$ 上では ρ である；

$$d_G f = f\overleftarrow{\rho} = \{f, \Phi_\alpha\} c^\alpha. \tag{2.9}$$

さて d_G をベキ零作用素として定義するために，準備がいる．まず $\mathfrak{g}$ から力学関数値への反対称多重線形写像 ω を考える．それは双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の外積代数 $\Lambda^{(*)}\mathfrak{g}^*$ で係数が q, p の関数であるものといえる；たとえば n 次の元は

$$\omega := c^{\alpha_1} \wedge c^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge c^{\alpha_n} h_{\alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1}.$$

ただし私たちは右微分を採用しているので，

$$(c^{\alpha_n} \wedge \cdots \wedge c^{\alpha_2} \wedge c^{\alpha_1})(X_n, \cdots, X_2, X_1)$$
$$:= \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) c^{\alpha_n}(X_{\sigma(n)}) \cdots c^{\alpha_2}(X_{\sigma(2)}) c^{\alpha_1}(X_{\sigma(1)})$$

と定義する；$\mathscr{S}_n$ は n 個のものの置換群である．この外積代数の上で双対境界作用素 $d_G: \Lambda^n \mathfrak{g}^* \to \Lambda^{n+1}\mathfrak{g}^*$ を定義するのである；$\hat{}$ を除く記号として，

$$(d_G\omega)(X_{n+1}, \cdots, X_2, X_1)$$
$$:= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \omega(X_{n+1}, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_2, X_1) \overleftarrow{\rho}(X_i)$$
$$+ \sum_{i,k} (-1)^{i+k} \omega(X_{n+1}, \cdots, \widehat{X}_k, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_2, X_1, [X_k, X_i]). \tag{2.10}$$

$n=0$ の場合は (2.9) に一致することがわかる．また上の表式で d_G を2回作用させることによりベキ零性

$$(d_G)^2 = 0 \tag{2.11}$$

も証明できる．とくに c^α についての作用は (2.10) の右辺第2項において基本的な交換関係 (2.8) をもちいて

$$d_G c^\alpha = \frac{1}{2} c^\beta \wedge c^\gamma C_{\gamma\beta}{}^\alpha \tag{2.12}$$

となる.

Tate の工夫によって力学変数が拡大された場合は, それに対応して $\Lambda^n \mathfrak{g}$ も拡張される；必要なだけ十分に拡張されたものを $\mathscr{F}_0^n$ と記す. このようにして次の図式がえられる；$d_G: 0 \to 0$ を加えて,

$$0 \xrightarrow{d_G} \mathscr{F}_0^0 \xrightarrow{d_G} \mathscr{F}_0^1 \xrightarrow{d_G} \cdots \xrightarrow{d_G} \mathscr{F}_0^n \xrightarrow{d_G} \mathscr{F}_0^{n+1} \xrightarrow{d_G} \cdots.$$

次数 n を純ゴースト数という.

0 次のコホモロジー群 $H^0(d_G; \mathscr{F}_{(*)}^0)$ の代表元 f は $\{f, \Phi_\alpha\} = 0$ $(1 \leq \alpha \leq M)$ をみたす. したがって (1.5) からわかるように, 微小なゲージ変換について不変な力学関数を選びだすことになる.

表 4　双対境界作用素 d_G に関連する記号の対照.

力学形式	$\mathfrak{g}$ の基底	M	$\mathfrak{g}$ の双対空間	$\mathfrak{g}$ の基底の双対基底	$\mathfrak{g}$ の双対空間の外積（部分）代数
ハミルトン形式	$\{\{\overline{p}_\alpha\}\}$	M	$\mathfrak{g}^*$	$\{\{c^\alpha\}\}$	$\Lambda^n \mathfrak{g}^*, \mathscr{F}_0^n$
ラグランジュ形式	$\{\{c_\alpha^*\}\}$	M	$\mathfrak{g}^\star$	$\{\{c^\alpha\}\}$	$\Lambda^n \mathfrak{g}^\star, \mathscr{C}_0^n$

ラグランジュ形式においても議論はほとんど並行に進む. ただ ρ の形がちがうだけである. 広義座標の汎関数 $f \in \mathscr{C}_0^0$ に対して表現 ρ は

$$d_G f(X) := f \overleftarrow{\rho}(X) := f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^i} \cdot \mathscr{R}^i_\alpha c^\alpha(X) = f \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^i} \cdot \mathscr{R}^i_\alpha \varepsilon^\alpha \tag{2.13}$$

で定義される. リー代数の交換関係 (2.8) に対応する汎関数の間の関係は次の式である；

$$\mathscr{R}^i_\alpha \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^k} \cdot \mathscr{R}^k_\beta - \mathscr{R}^i_\beta \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^k} \cdot \mathscr{R}^k_\alpha = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \mathscr{R}^i_\gamma. \tag{2.14}$$

運動方程式やゲージ変換にグラスマン偶奇の混在する場合でも定式化できる.

2.3　2重複体と双対境界作用素 $D=\delta_K+d_G$

いままで二つの（双対）境界作用素 δ_K, d_G をつくった．次の段階として，力学関数の集まり $\mathcal{F}^0_m$（あるいは $\mathcal{C}^0_m$），$\mathcal{F}^n_0$（$\mathcal{C}^n_0$）を自然な形で拡大するのである．混雑を防ぐためにハミルトン形式の場合を先にのべる．既約な拘束条件に限ると，力学関数の空間全体 $\mathcal{F}$ とその部分空間は次であたえられる；

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &:= \bigoplus_{n,m=0}^{\infty}\mathcal{F}^n_m,\\ \mathcal{F}^n_m &= \{\!\{c^{\alpha_1}\wedge c^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge c^{\alpha_n}h_{\alpha_n\cdots\alpha_2\alpha_1}{}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}(q,p)\,\overline{\wp}_{\beta_m}\wedge\cdots\wedge\overline{\wp}_{\beta_2}\wedge\overline{\wp}_{\beta_1}\}\!\}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

これらの部分空間の次数 n, m を上げ下げする（双対）境界作用素として，それぞれ d_G, δ_K を定義する．

拘束条件を課するための δ_K は定義（2.3）そのままでよい；なぜなら $\delta_K c^\alpha=\delta_K f(q,p)=0$ である．つまり $\delta_K\colon\mathcal{F}^n_m\to\mathcal{F}^n_{m-1}$ ができた．

対称性について不変な部分空間をとり出すための d_G を $\mathcal{F}$ 全体に拡張するには g と g* の双対性をつかう．つまり（2.10）の ω（$\in\mathcal{F}^1_0$）と X_i の役割を交代させることによって，（2.10）を $d_G X_i$ などを定義するのにそのまま使用する．Faddeev-Popov ゴースト c^α を広義座標とし $\overline{\wp}_\alpha$ を正準共役な運動量として，ポアソン括弧を線形空間の双対性で定義する；

$$\{c^\alpha, \overline{\wp}_\beta\} = c^\alpha(\overline{\wp}_\beta) = \overline{\wp}_\beta(c^\alpha) = \delta^\alpha_\beta.$$

この基本的なポアソン括弧が d_G の作用によって変わらないと仮定すると，任意性はあるが最も簡単な演算として次の形がえられる；

$$d_G\overline{\wp}_\alpha = c^\beta C_{\beta\alpha}{}^\gamma\,\overline{\wp}_\gamma.$$

式（2.9）と（2.12）と上式をあわせて $d_G\colon\mathcal{F}^n_m\to\mathcal{F}^{n+1}_m$ がわかる．

既約な拘束条件だけでなく，可約な場合にも（1.2 a）の中の構造関数 $U_{\alpha\beta}{}^\gamma$ が構造定数 $C_{\alpha\beta}{}^\gamma$ のときには，力学関数全体 $\mathcal{F}$ は2重複体となる；図4 a に図式化する．拘束条件がグラスマン偶奇，混っていても同様の議論ができる．

◆ラグランジュ形式の場合◆

ハミルトン形式と同様に力学関数の空間 $\mathcal{C}$ とその次数つき部分空間 $\mathcal{C}^n_m$ を

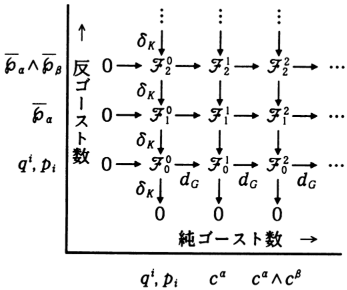


図4 a　ハミルトン形式の2重（双対）鎖複体 $\mathscr{F}$

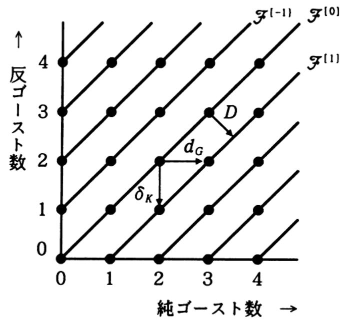


図4 b　図式4 a を簡略化したものと D の作用．斜めの線は $\mathscr{F}^{[l]}$ をしめす目の案内．黒丸は部分空間 $\mathscr{F}^n_m$.

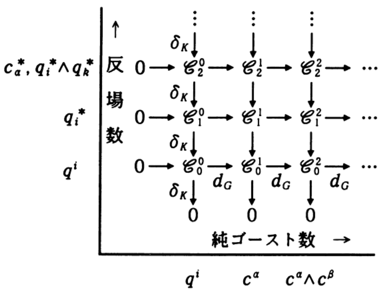


図5 a　ラグランジュ形式の2重（双対）鎖複体 $\mathscr{C}$

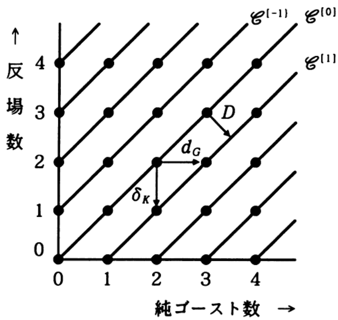


図5 b　図式5 a を簡略化したものと D の作用．斜めの線は $\mathscr{C}^{[l]}$ をしめす目の案内．黒丸は部分空間 $\mathscr{C}^n_m$.

(2.15) にならって構成する．たとえば既約なゲージ対称性をもつ系では

$$\mathscr{C}^2_m := \{\!\{ q_i^* \wedge q_k^* f^{ki}_{\alpha\beta}(q) c^\beta \wedge c^\alpha + c_\alpha^* h^\alpha{}_{\beta\gamma}(q) c^\gamma \wedge c^\beta \}\!\}.$$

他の部分空間も上の形から推定できる．次の段階として次数 n, m を上げ下げする（双対）境界作用素としてそれぞれ d_G, δ_K を定義する．

ラグランジュ形式の δ_K (2.3) は，ゴーストなどを導入したあと，拡大された

力学関数全体 $\mathscr{C}$ にも問題なく適用される.

Faddeev - Popov ゴースト c^{α} についての d_G の作用は (2.10) の右辺第2項できめられるので, (2.12) と同じになる.

ラグランジュ形式の d_G については, ペアになる, つまり「正準」共役になる力学関数 q^i, q_i^* の組や c^{α}, c_{α}^* の組がその中で互いにグラスマン偶奇性がちがうという特別な事情がある; これはハミルトン形式になかった事情である. そのために反括弧 (antibracket) (,) というポアソン括弧に相当する演算を定義する;

$$(F, G) := F\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^i}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta q_i^*}G - F\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q_i^*}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta q^i}G + F\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta c^{\alpha}}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta c_{\alpha}^*}G - F\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta c_{\alpha}^*}\cdot\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta c^{\alpha}}G.$$

基本的な反括弧は次のようになる;

$$(q^i, q_k^*) = -(q_k^*, q^i) = \delta^i_k, \qquad (c^{\alpha}, c_{\beta}^*) = -(c_{\beta}^*, c^{\alpha}) = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

つまり反括弧はシンプレクティック形式を表している; 双対リー代数を $\mathfrak{g}^{\star}$ で記す.

広義座標 q^i, c^{α} についての d_G の作用 (2.13) と (2.12) とから, 反括弧を不変にするように q_i^*, c_{α}^* についての d_G への作用をきめればよい. 任意性はあるが最も簡単な形として

$$d_G q_i^* = -q_k^*\cdot\mathscr{R}^k_{\alpha}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta q^i}\cdot c^{\alpha}, \qquad d_G c_{\alpha}^* = c_{\beta}^* C_{\alpha\gamma}{}^{\beta} c^{\gamma}$$

がえられる; $d_G\colon \mathscr{C}^n_m \to \mathscr{C}^{n+1}_m$ が定義できた. このようにして, ラグランジュ形式においても構造定数をもつゲージ対称性の拘束系の力学関数全体は2重複体を構成する; 図5aに図式化した. 運動方程式とゲージ変換にグラスマン偶奇が混在しても同様の議論がなりたつ.

◆双対境界作用素 D ◆

2重複体を構成したあと, 双対境界作用素

$$D := \delta_K + d_G$$

を導入する. これがベキ零 $(D)^2 = 0$ であることは δ_K, d_G それぞれのベキ零性

(2.4)，(2.11) と反可換性 $\delta_K d_G + d_G \delta_K = 0$ からわかる．ハミルトン形式においては BRST 変換とよばれる．しかしラグランジュ形式では，文献 [4] に従って，物理学でいうゲージ固定をしたあと D に対応する作用素を BRST 変換ということが多い．ハミルトン形式の場合に図4bにしめすように，D は部分空間の和

$$\mathscr{F}^{[l]} := \bigoplus_{n-m=l} \mathscr{F}^n_m$$

の次数 l を一つだけ上げる作用としてはたらく；

$$D : \mathscr{F}^{[l]} \to \mathscr{F}^{[l+1]}.$$

この新しい次数 l を正味のゴースト数という．

作用素 D と $\mathscr{F}^{[l]}$ についてホモロジー的な処方が適用できるが，スペクトル系列の理論から次の関係がわかる；

$$H^0(D;\mathscr{F}) := \frac{\mathrm{Ker}D\,(\mathscr{F}^{[0]} \to \mathscr{F}^{[1]})}{\mathrm{Im}D\,(\mathscr{F}^{[-1]} \to \mathscr{F}^{[0]})} = H^0(d_G; H_0(\delta_K;\mathscr{F})). \tag{2.16}$$

最後の式の右辺については，それぞれの純ゴースト数 n について $H_0(\delta_K;\mathscr{F}^n_{(*)})$ をもとめたあと，それぞれの代表元の d_G を作用すると考えて，同値類について $H^0(d_G)$ を計算する；導くのに (2.5) が重要である．この右辺の意味を考えてみると，拘束条件を課した位相空間の部分空間の上の関数から対称性に関して不変なものを選びだしたことになる；つまり，これは物理的に意味のある力学関数全体である．

まとめると，最も簡単な拘束系においては，二つの作用素 δ_K, d_G によって力学関数全体が2重複体を構成し，$D = \delta_K + d_G$ の0次のコホモロジー群 $H^0(D)$ は物理的に意味のある関数である．この数理はハミルトンとラグランジュ形式に共通する．この数理が理論の基礎であり，さらにポアソン括弧や反括弧によって力学を記述したり，より複雑な拘束系に拡張したり，量子化に進むときの出発点になる．

ハミルトン形式においては，まず D をポアソン括弧の生成元で表現する；任意の $F \in \mathscr{F}$ について，

$$DF = \{F, \Omega\}, \qquad \Omega := \Phi_\alpha c^\alpha + \frac{1}{2} c^\alpha \wedge c^\beta C_{\beta\alpha}{}^\gamma \overline{\wp}_\gamma. \tag{2.17}$$

最後の式は $\delta_K F = F\overleftarrow{\partial}/\partial\overline{\wp}_\alpha \cdot \Phi_\alpha = \{F, c^\alpha\}\Phi_\alpha$ と (2.9), (2.12) とからわかる．ベキ零性 $(D)^2 = 0$ は，ポアソン括弧についての Jacobi の恒等式により，次の式と同じである；

$$\{\Omega, \Omega\} = 0.$$

次に力学として完結させるため D-不変なハミルトニアン H_Ω を構成する；$\{H_\Omega, \Omega\} = 0$．このハミルトニアンで時間発展を記述するのである．式 (1.2 b) の記号をつかい，H_Ω はゴースト変数の多項式で表される；

$$H_\Omega = H_{cl} - c^\alpha V_\alpha{}^\beta \overline{\wp}_\beta + \cdots.$$

ラグランジュ形式においては，同様に D を反括弧の生成元で表現する；任意の $F \in \mathscr{C}$ について，

$$DF = (F, S), \qquad S := S_0 + q_i^* \mathscr{R}^i{}_\alpha c^\alpha + \frac{1}{2} c_\alpha^* C_{\beta\gamma}{}^\alpha c^\gamma \wedge c^\beta.$$

ただし $S_0 = \int L\,dt$ は最初にあたえられた作用積分である．いままで与えられた D の $q^i, q_i^*, c^\alpha, c_\alpha^*$ への作用を再現できることがわかるだろう．ベキ零性 $(D)^2 = 0$ は

$$(S, S) = 0 \tag{2.18}$$

と同じであることが反括弧についての Jacobi の恒等式により理解される．式 (2.18) をマスター方程式とよぶ．

両力学形式でのゲージ固定の具体的な手続き，量子化については [24], [25] を参照されたい．

3° 一般的な拘束系

◆ハミルトン形式◆

ゲージ代数関係 (1.2) の構造関数 $U_{\alpha\beta}^\gamma$ が定数でない系では，力学関数全体は 2 重複体をつくらない．この場合 BRST 変換 D は $\delta_0 := \delta_K$ と $\delta_1 := d_G$ との和ではなく，次のようにもっと多くの微分の和の形に分解される；

$$D = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots. \tag{3.1}$$

ただし図6にしめすように，$\delta_s: \mathcal{F}_m^n \to \mathcal{F}_{m+s-1}^{n+s}$ である．各々の微分の間には次の関係がなりたつ；

$$
\begin{aligned}
(\delta_0)^2 &= 0, \\
\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0 &= 0, \\
\delta_0\delta_2 + (\delta_1)^2 + \delta_2\delta_0 &= 0, \\
&\cdots\cdots, \\
\delta_0\delta_s + \delta_1\delta_{s-1} + \cdots + \delta_{s-1}\delta_1 + \delta_s\delta_0 &= 0, \\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

上の諸式は $(D)^2 = 0$ と整合的である．また (3.2) の図式6aにおける意味は閉じた折れ線であり図6bにしめす．

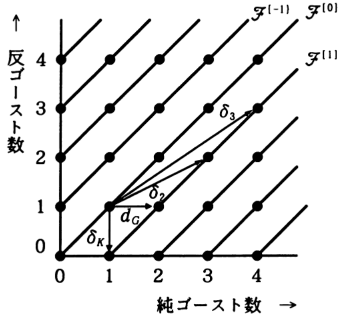


図6a　図式4を簡略化したものと $\delta_K, d_G, \delta_2, \delta_3$ の作用．斜めの線は $\mathcal{F}^{[l]}$ をしめす目の案内．黒丸は部分空間 $\mathcal{F}_m^n$．

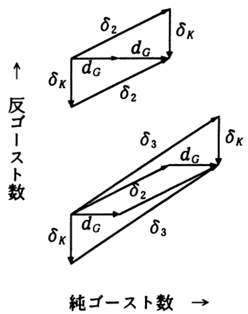


図6b　ホモロジー摂動論の δ_2, δ_3 の閉じた折れ線：ベキ零性 $(D)^2 = 0$ の一部である．

このような系の例として Arnowitt-Deser-Misner の定式化による一般相対性理論がある．

物理的意味のある関数の抽出には，2重複体のときと同様，スペクトル系列の理論が適用される．しかし (2.16) のように簡単な形にならずに，一般的な仕組みを応用することになる．このように2重複体を基礎として新たな微分 $\delta_2, \cdots$ をつけ加えるとみなすのである；この考え方を **ホモロジー摂動論** とよぶことが

ある．

一般化された BRST 変換 D をもとめるには，一般化された生成元をやはり Ω とかいて（(2.17) 参照），ベキ零性と同値な関係 $\{\Omega, \Omega\} = 0$ によって生成元を見いだしたほうが簡単なことが多い．

着目する拘束系のハミルトニアンは一般化された D-不変に構成する；$\{H_\Omega, \Omega\} = 0$．

◆ラグランジュ形式◆

ハミルトン形式と同様に (3.1)，(3.2) と同じ形 D をもとめることになる．しかし各々の微分 δ_s の意味は同じ添字 s でハミルトン形式とは対応しない；δ_2 は開いたゲージ変換（1.10）のために必要である；δ_3 は（2.14）において構造定数 $C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ が構造関数 $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ になったために現れる．

一般化された D の反括弧についての生成元 S は同時に作用積分であるが，作用積分が D-不変であることが再びマスター方程式 $(S, S) = 0$ となる．この方程式により S をもとめたほうが D を計算するより簡単なことが多い．

最後に二つの補足をつけ加える．

第2種の拘束条件

例1のようなハミルトン形式における第2種の拘束条件をもつ古典場の例として質量のある電磁場がある．この場合には力学関数を拡大して新たな場（一般化された Stückelberg 場）を導入することによって，いままで議論した第1種の拘束条件に帰することが知られている [26]．

de Rham の外微分を考慮

力学関数全体の2重複体に de Rham コホモロジーの外微分 d をさらに考慮しなければならない場合がある．力学関数全体に d と D との和 $D+d$ を考えるのは量子的異常性（anomaly）の議論である（解説 [6]）．

またラグランジュ形式において一般化された作用積分 S の時空間に関する局所性を証明する際にも de Rham の微分 d と δ_K の二つの（双対）境界作用素を考えるのである [27]．

参考文献

[1] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] R. Abraham and E. Marsden, *Foundations of Machanics*, Benjamin/Cummings Pub. Co., Inc., New york, 1978. 2nd. ed.

[3] 長野 正, 曲面の数学, 培風館, 1976.

[4] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Commun. Math. Phys.*, **42** (1975), 127.

[5] I. V. Tyutin, Moscow Preprint No. 39 (1975).

[6] 九後 汰一郎, ゲージ場の量子論 I, II, 培風館, 1989.

[7] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity*, World Scientific, Singapore, 1990.

[8] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, Ref. TH. 2332-CERN, 1977.

[9] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B 69** (1977), 309.

[10] A. D. Browning and D. McMullan, *J. Math. Phys.* **28** (1987), 438.

[11] B. Kostant and S. Sternberg, *Ann. Phy.* **175** (1987), 1.

[12] 河田敬義, ホモロジー代数学, 岩波書店, 1977.

[13] M. Henneaux, *Phys. Report* **126** (1985), 1.

[14] J. Fisch, M. Henneaux, J. Stascheff and C. Teitelboim, *Commun. Math. Phys.* **120** (1989), 379.

[15] J. Zinn-Jutin, *Lecture note in Phys.* vol. 37, pp. 34 – 38, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[16] I. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B 102** (1981), 27.

[17] M. Henneaux, *Proceedings of the XX GIFT International Seminor on Theoretical Physics*, Jaca, Spain, 1989.

[18] E. Witten, *Mod. Phys. Lett.* **A 5** (1990), 487.

[19] M. Henneaux, Preprint ULB-PMIF-92/01.

[20] A. Schwarz, Preprint Univ. California, Davis, 1993.

[21] O. M. Khudaverdian and A. P. Nersessian, Preprint UGVA-DPT 1993/03-807.

[22] A. Dress, P. Gregoire and M. Henneaux, *Nucl. Phys.* **B 354** (1991), 192.

[23] G. V. Grigoryan, R. P. Grigoryan and I. V. Tyutin, *Nucl. Phys.* **B379** (1992), 304.

[24] 村井信行, 数理物理 '92 予稿集, 学習院大学, 1992.

[25] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, 1992.

[26] I. Batalin and E. S. Fradkin, *Nucl. Phys.* **B 279** (1987), 514.

[27] M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **140** (1990), 1.

11話

ウェーブレット解析

山田道夫

1° はじめに

1980年代の初め，フランスの石油探査技術者が地震波記録の解析の必要にせまられて一つのアイデアを思いついたのが，ウェーブレット解析（Wavelet Analysis）の発端であったという．従来，時系列データの解析にはフーリエ解析（Fourier Analysis）が標準的に用いられている．しかし彼は，三角関数のように一様に広がった関数ではなくもっと局所的な関数，たとえば原点付近以外ではほとんどゼロであるような関数を用いれば，刻一刻と性質が変化していくようなデータの解析にも役に立つのではないか，と考えた．このアイデアは数学者の興味をひき，より一般的な方法で定式化が行なわれた後，80年代から90年代にかけて，多くの数学的結果とともにさまざまの理工学的応用が発表されるようになった．この傾向は現在も継続しており，関連分野は数学・物理学などの理学分野から土木・建築・電気・情報などの工学，さらには医療診断などにまで及んでいる．ウェーブレットは，分野横断的に理論と応用の間を行き来しながら発展しつつある概念であり，まさに応用数学の概念といえるだろう．ここでは，このようなウェーブレット解析の基本的性格と，理工学的応用に際しての利点について触れることにしたい．

2° フーリエ解析とウェーブレット解析

フーリエ解析では，関数を三角関数の和として表現しその展開係数の性質を議論する．この方法は関数の変動のスケールを分離するうえで非常に有効であ

り，現在ありとあらゆるところで用いられている．データ解析の観点からみれば，フーリエ解析は，まず第一にデータに含まれる周期性の検出に不可欠の道具である．三角関数のもつ周期性がこのような応用の基礎にあることはいうまでもない．また，フーリエ解析は，スペクトルのベキ則などからデータの自己相似性の特徴を抽出する道具でもある．三角関数は周期の異なるもの同士であっても時間の縮尺を変えると互いにぴったりと重ねることができる．すなわち三角関数はすべて互いに相似な関数であり，これがデータの自己相似性の検出において有利に働いているのである．さらにまた，三角関数は微分作用素の固有関数でもあるため，フーリエ解析は線形作用素のスペクトル分解と密接な関係にあり，微分方程式を解く際の実用的な道具ともなっている．このように多様な応用をもつ方法はほかにはちょっと見あたらない．フーリエ解析は理論的にも応用的にも非常に優れた方法である．

しかしもちろんフーリエ解析に欠点がないわけではない．フーリエ解析のユーザーにとっていちばんの不満は，おそらく，展開係数の性質と関数の局所的な特徴の対応が困難なことであろう．たとえば，展開係数の漸近的な振る舞いは関数の不連続性が最も激しい場所によって決まってしまうため，他に程度の異なる不連続性があったとしてもそれを展開係数を調べて見いだすことは難しい．また，たとえば関数全体が性質の異なる複数の部分からなっている場合，それぞれの特徴を展開係数から抽出することは困難である．このような困難は，フーリエ解析においては事象の場所あるいは時刻の情報が展開係数の位相部分（もっと正確にいえば位相も含めた展開係数の相互関係）に集められていて，通常使うようなスペクトル，すなわち展開係数の絶対値の2乗からはその情報が取り出せないことに起因している．これはもとをたどれば，結局，三角関数がどこまでもべったりと一様に振動していることによっている．データを構成するそれぞれの三角関数の大きさがわかっても，一個の三角関数は空間的に一様であるため特定の位置や時刻を見分けることができない．もちろん位相部分も含めて展開係数を精密に調べればもとの情報を復元できるわけであるが，実際にこのような解析を行なうことはたいへん難しいのが普通である．

それでは，関数の局所的性質をとらえるためにはどのような解析方法を用いればよいだろうか．いまフーリエ解析のような関数展開法を念頭におくとすると，上に述べたことから基底関数系は空間的に局在していることが望ましい．このような局在化を手軽に行なうためには，データにまず窓関数（window function）を掛けてデータそのものを局在化させてから，フーリエ変換を行なえばよい．この方法は「窓付きフーリエ変換」（Windowed Fourier Transform）と呼ばれ，音声や地震動など周波数の時間変化を詳しく解析しようとするときなどに広く用いられている．窓関数の影響などの点に注意すれば，周波数変化の細かい解析を行ないたいとき，この方法は非常に実用的である．

しかし周期性や相似性については，窓付きフーリエ変換はいずれの性質も壊してしまっている点に注意しよう．これらの性質を壊すことによって，局所性という性質を手に入れたわけである．これに対して，周期性は壊すものの相似性は完全に保ちながら局所性を手に入れる，というやり方がある．これがウェーブレット解析の立場にほかならない．このためにはまず，三角関数の場合と同様，基底関数を互いに相似になるように構成することが必要である．一方，局在性の要求から，これらの関数は空間的に局在化していなければならないから，単に相似変換で得られる関数を基底にとるだけでは，表現できる関数が非常に限られてしまう．結局，「すべての」関数を表現するためには，相似変換で作った関数をさらに平行移動することによって得られる関数系が必要となる．以上の考察をまとめると，ウェーブレット解析における基底系は次のようなものとなる．

まずなにか適当に局在化した関数 $\psi(t)$ を選び，次にそれを相似的に変換し ($\psi(x/a)$, $a \in \boldsymbol{R}$)，さらに平行移動して得られる関数系

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad (a, b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0)$$

が求めるものである．すなわち，ひとつの関数からスケール変換と並進の２操作で構成される基底関数系を考え，これを用いた変換がウェーブレット変換と呼ばれるものである [1], [2].

3° 連続ウェーブレット変換

現在，ウェーブレット変換と呼ばれているものには大きく分けて「連続ウェーブレット変換」および「離散ウェーブレット変換」の２種類のものがある．ある面では積分形で書くフーリエ変換とそれを離散化したフーリエ展開の関係に似ていなくもないが，基本的に異なる側面もある．

3.1 連続ウェーブレット変換の定義

まず，連続ウェーブレット変換を定義しよう．

次の条件をみたす関数（analyzing wavelet, mother wavelet）をひとつ選んで $\psi(t)$ $(\in L^2(\boldsymbol{R}))$ とする．

$$c_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \text{有限} \qquad \left(\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\psi(t)\,dt\right)$$

この条件は admissibility condition と呼ばれ，ふつう使うような遠くで速くゼロになる関数 $\psi(t)$ に対しては

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0$$

と同値になることが知られている．この条件をみたす関数を構成することは容易であり，実際の応用に際してもさまざまな関数が用いられている．Mexican hat と呼ばれる次の関数

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = (1-t^2)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

などはその代表的なものである．

さて，この analyzing wavelet を用いてウェーブレット（wavelets）と呼ばれる次の関数系を作る．

$$\psi^{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad (a, b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0)$$

ここで，$1/\sqrt{|a|}$ はウェーブレットの L^2 ノルムを一定にするための調整因子で

ある．関数 $f(t)$ $(\in L^2(\boldsymbol{R}))$ の連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ とは，このウェーブレットを核として用いた積分変換のことで，

$$T(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(a,b)*}(t) f(t)\, dt$$

と定義される．この定義に現れる定数 c_ψ は，admissibility condition で有限性が保証されている値であることを注意しておく．admissibility condition がみたされているとき，この変換は可逆であり，逆変換は

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(a, b)\, \psi^{(a,b)}(t) \frac{1}{a^2}\, da\, db$$

で与えられる [2]．

一見してわかるように，ウェーブレット変換は形式的にはフーリエ変換によく似た形をしている．フーリエ変換が時間 t の関数から周波数 ω の関数への写像であるのに対して，ウェーブレット変換は a, b の 2 変数関数への写像である．$1/a$ は周波数，b は時刻に対応していることに注意しよう．この意味で（不確定性関係による制限はもちろんあるが）「$T(a, b)$ は時刻 b における周波数 $1/a$ の成分の振幅に対応する」と考えて応用されることも多い．このような局所的な周波数解析はウェーブレット解析の特徴である．

ところで，先に述べた窓付きフーリエ変換でも局所的な周波数解析が可能であった．この二つの方法の相違点は，ウェーブレット変換では「窓」の大きさが周波数とともに変化してゆく点にあることに注意されたい．標語的にいえば（したがってやや不正確ではあるが），ウェーブレット変換とは「窓」の大きさが周波数に反比例する「窓付きフーリエ変換」である．そのため，ウェーブレット変換では高周波数（$|a| \ll 1$）の成分をみることでいくらでも時間分解能を上げることができる．これは窓付きフーリエ変換の分解能が，周波数によらず，窓関数の大きさによって決まってしまうのと対照的である．

3.2　基底の過剰完全性

さて，$T(a, b)$ については次の恒等式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |T(a, b)|^2 \frac{1}{a^2} da\, db$$

これはフーリエ変換の場合のパーセヴァル（Parseval）の等式（つまりピタゴラスの定理）に類似しているため，上の式に出てくる $|T(a, b)|^2$ を，左辺のエネルギーの分配に対応すると考えることもできる．しかし，ここで次のことに注意しなければならない．

ウェーブレット $\{\psi^{(a,b)}(t)\}$ は一次独立ではない．

すなわち，ウェーブレット $\{\psi^{(a,b)}(t)\}$ は一次従属な基底であり，完全系を真の部分集合として含んでいる（過剰完全系（over-complete system））．このため，$T(a, b)$ は関数 $f(t)$ の性質には無関係な一次従属性

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(a, b\,; a', b')\, T(a', b') \frac{1}{a'^2} da'\, db'$$

$$K(a, b\,; a', b') = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(a,b)*}(t)\, \psi^{(a',b')}(t)\, dt$$

をもっている．

ここで，このような基底は実は珍しいものではないことを注意しておきたい．たとえば平面 $\boldsymbol{R}^2$ の中で，長さが $\sqrt{2/3}$ で互いに120度の角度をなす三つのベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を選ぶと，これらは一次従属

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

であるにもかかわらず，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\in \boldsymbol{R}^2)$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3$$

$$|\boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x})^2 + (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x})^2 + (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x})^2$$

が成り立つ．一般にこのような性質をみたす基底は tight frame と呼ばれる．連続ウェーブレットはこのような基底の $L^2(\boldsymbol{R})$ における対応物と考えることができる．

3.3　連続ウェーブレット変換の一般的定式化

連続ウェーブレット変換の構造をやや詳しくみてみよう．まず，ウェーブレットの構成に用いられるスケール変換と並進を，関数 $f(t) \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して次のように作用する作用素と考える．

$$D^a f(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{a}\right), \qquad T^b f(t) = f(t-b)$$

すぐわかるように，これらは $L^2(\boldsymbol{R})$ のユニタリ変換である．そこで，$U(a, b) = T^b D^a$ とおき

$$U(a_1, b_1) U(a_2, b_2) f(t) = |a_1 a_2|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t-(a_1 b_2 + b_1)}{a_1 a_2}\right) = U(a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1) f(t)$$

となることに注意すると，$G = \{(a, b) \mid a, b \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0\}$ に積

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$$

を定義することができる．このとき G はこの演算によって群となり，$(a, b) \mapsto U(a, b) = T^b D^a$ は，群 G の $L^2(\boldsymbol{R})$ における既約ユニタリ表現を与えている．連続ウェーブレット変換に頻出する測度 $dg = \dfrac{dadb}{a^2}$ は，実はこの群 G の左不変測度にほかならない．

スケール変換と並進操作がなす群構造とウェーブレットの関係は，実は次のように大きく一般化することができる．いま G を局所コンパクト群，H をヒルベルト空間として，G の強連続な既約ユニタリ表現で H を表現空間とするものを $U: g \mapsto U(g)$ とする．H の元 ψ は次の条件をみたすとき admissible であると定義する．

$$c_\psi \equiv \frac{1}{\|\psi\|^2} \int |(U(g)\psi, \psi)|^2 dg < \infty \qquad \text{(admissibility condition)}$$

ここで，$(\ ,\ )$ と $\|\cdot\|$ は H の内積とノルム，dg は G 上の左不変測度である．いま ψ が admissible として，H の任意の元 f に対して G 上の関数 $L_\psi f$ を

$$(L_\psi f)(g) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} (U(g)\psi, f)$$

のように対応させよう．このとき L_ψ は H から $L^2(G, dg)$ の中への等長写像

$$\int (L_\psi f_1)^*(g)\,(L_\psi f_2)(g)\,dg = (f_1, f_2)$$

となっていること（isometry）を示すことができる．したがって，L_ψ はその値域上で可逆であり，逆変換は L_ψ の adjoint $(L_\psi)^*$ によって与えられる．

このL$_\psi$ と $(L_\psi)^*$ の対は，ウェーブレット変換と逆変換の対に対応している．実際，admissibility condition は

$$c_\psi \equiv \frac{1}{\|\psi\|^2}\int |(U(a,b)\psi, \psi)|^2 \frac{da\,db}{a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega < \infty$$

となり，ウェーブレット順変換とその逆変換は

$$T(a,b) = (L_\psi f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}(T^b D^a \psi, f) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi^*\!\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t)\,dt$$

$$f(t) = ((L_\psi)^*(L_\psi f))(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(a,b)\,\frac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi\!\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{da\,db}{a^2}$$

のように導かれる．また，等長関係は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T_1^*(a,b)\,T_2(a,b)\,\frac{da\,db}{a^2} = \int (L_\psi f_1)^*(g)\,(L_\psi f_2)(g)\,dg$$

$$= (f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)^* f_2(t)\,dt$$

となって，先に述べた「エネルギー分配則」を与えている．

このような一般的定式化（[2]）を用いれば n 次元ウェーブレット変換を得ることは容易である．$H = L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の場合，$G = \{(a, r, \boldsymbol{b}) \mid a > 0,\ r \in SO(n),\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n\}$，$dg = \dfrac{da\,dr\,d\boldsymbol{b}}{a^{n+1}}$（$dr$ は $SO(n)$ のハール測度）となり，admissibility condition，ウェーブレット，$f(\boldsymbol{x}) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の連続ウェーブレット変換，逆変換はそれぞれ

$$c_\psi \equiv \int_{R^n} \frac{|\hat{\psi}(\boldsymbol{k})|^2}{|\boldsymbol{k}|^n}\,d\boldsymbol{k} < \infty$$

$$\psi^{(a,r,\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a^{n/2}}\,\psi\!\left(\frac{r^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})}{a}\right)$$

$$T(a, r, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{R^n} \psi^{(a,r,\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{x})^* f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_G T(a, r, \boldsymbol{b})\, \psi^{(a,r,\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{x}) \frac{da\, dr\, d\boldsymbol{b}}{a^{n+1}}$$

のように導かれる．多次元の場合には，スケール変換と平行移動のほかに回転操作が加わっているが，これは一般のマザー・ウェーブレットを用いる場合の話で，もし回転対称性をもつマザー・ウェーブレットを用いるなら回転部分に関する積分は単に定数となる．このような多次元ウェーブレット変換は，とくに２次元の場合など画像データの解析などに用いられている．

4° 離散ウェーブレット変換

4.1　直交ウェーブレット

連続ウェーブレット変換は過剰完全基底による関数の表現を与えるため，変換された関数 $T(a, b)$ は a, b の任意関数ではありえない．この性質はウェーブレットを用いてデータ解析などを行なう場合あまり望ましいものではない．第一に，$T(a, b)$ の示す性質のうちどの部分が本来のデータ独自のものか見分けなければいけないし，第二に，変換された関数 $T(a, b)$ を自由に加工することが難しくなる．このような難点は，過剰完全基底を完全正規直交基底に作り直せば一挙に解決できるわけである．

すぐわかるように，ウェーブレットを直交化するためにはパラメータ a, b を離散化しなければならない．このとき，ウェーブレット相互の相似性を保ちしかもあらゆるスケールを平等に扱うためには，a, b を $a_0^{-j}, kb_0a_0^{-j}$ $(j, k \in \boldsymbol{Z}$, $a_0\,(>1)$, $b_0\,(>0)$ は定数）ととればよく，ウェーブレットそのものは

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t - kb_0a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j t - kb_0) \qquad (j, k \in \boldsymbol{Z})$$

のようになる．一般には離散化してしまうとウェーブレットは基底にすらならない．しかし，$\psi(t)$ や a_0, b_0 などがある程度の条件をみたせば離散ウェーブ

レットは frame あるいは tight frame となり，さらに非常に注意深く $\psi(t)$ を選ぶとこれらの離散ウェーブレットを $L^2(\boldsymbol{R})$ の中での完全正規直交基底にすることができる．

完全正規直交ウェーブレット（以下，直交ウェーブレットという）の構成は，ウェーブレットの不連続性さえ気にしなければ実は容易で，たとえば古くから知られているハール基底は次のマザー・ウェーブレット

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq t < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

から作られる直交ウェーブレットにほかならない．しかしハール基底は不連続関数からなっているため，よい近似を得るのに必要な展開項数が大きくなり，特殊な目的以外にはあまり適さない．収束の速さを上げるためには連続性をよくすることが必要なのである．このようななめらかな直交ウェーブレットは，80年代の半ばに Meyer によって初めて与えられた [3]． 彼は無限回微分可能で急減少な直交ウェーブレット（以下，Meyer ウェーブレットという）の構成に成功し，それ以後の発展の契機を与えることになった．いまでは，さまざまな連続性・微分可能性・局在性をもつ直交ウェーブレットが知られている．

ここで，なめらかさと局在性はウェーブレットに本質的な制限を課すことに注意しておきたい．もしウェーブレット $\{\psi_{j,k}(t) \mid j, k \in \boldsymbol{Z}\}$ が正規直交性（完全性はなくともよい）をみたし，しかも $\psi(t) \in \boldsymbol{C}^m$ ならば（微分も含めて $|t| \to \infty$ で十分速くゼロになると仮定して）

$$\int t^l \psi(t)\, dt = 0 \qquad (0 \leq l \leq m)$$

すなわち，m 次までのモーメントが消えなければならないことが証明される．したがって，とくに Meyer ウェーブレットの場合ならすべてのモーメントがゼロでなければならないわけである．相似性・正規直交性・なめらかさの性質を合わせ持つことが，ウェーブレットに厳しい制限を課していることがわかる．またこれに関連して，次の重要な制限も導かれる．すなわち，「$\psi(t)$ が，無限回微

分可能，$|t|\to\infty$ で指数的減少，かつすべての階数の導関数が有界，という三つの性質を同時にみたすような正規直交ウェーブレットは存在しない」[6]．つまり，ウェーブレットのなめらかさと局在性の両立には，残念ながら限界があるわけである．この意味で，Meyer の得た直交ウェーブレットはほとんどぎりぎりのところに位置していたということができる．

4.2　多重解像度解析（MRA）

連続ウェーブレットが群の表現を用いて定式化されたのに対し，直交ウェーブレットは $L^2(R^n)$ の中の閉部分空間列を用いた「多重解像度解析」という概念によって定式化することができる．

1次元の場合を考える．いまマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ をうまく選んで，離散ウェーブレット

$$\{\psi_{j,k} \mid \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k),\ j, k \in Z\}$$

が完全な正規直交系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}^*(t)\,\psi_{j',k'}(t)\,dt = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$$

になったと仮定しよう．このとき任意の関数 $f(t) \in L^2(R)$ は，次のように直交ウェーブレット展開によって表すことができる．

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\psi_{j,k}(t), \qquad \alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{j,k}(t)^* f(t)\,dt$$

添え字 j は2倍ごとの拡大・縮小のパラメータであることに注意すると，この展開式は，倍々に解像度を上げながら関数 $f(t)$ を観察する過程に対応していることがわかる．この事情を抽象化したものが，次の「多重解像度解析」(Multi-Resolution Analysis，以下 MRA と記す)［4］である．

定義　関数空間 $L^2(R)$ の中の閉部分空間列 V_j $(j \in Z)$ と関数 $\phi(t)$ の対で，次の五つの条件をみたすものを**多重解像度解析**という．

1.（単調性）　$V_j \subset V_{j+1}$　$(j \in Z)$
2.（稠密性）　$\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L^2(R)$

3. （分離性）　$\bigcap_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j = \{0\}$

4. （スケーリング性）　$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0$

5. （正規直交性）　$\{\phi(t-n) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ は V_0 の正規直交基底　◇

ここで V_j は，結果的に，直交ウェーブレットのうちスケール・パラメータが j 以下のものによって張られる空間に対応することになる．また $\phi(t)$ は，以下に述べるようにマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ を作り出す関数で，スケーリング関数あるいはファーザー・ウェーブレットと呼ばれるものである．

さて，各 V_j は V_{j+1} の部分空間であるから，その直交補空間 W_j

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \qquad V_j \perp W_j$$

については直和の稠密性，すなわち

$$\overline{\bigoplus_{j\in \boldsymbol{Z}} W_j} = L^2(\boldsymbol{R})$$

が成り立っている．そこで，$\{\psi(t-k) \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ が W_0 の正規直交基底となるようなものを見つければ，これが直交ウェーブレットを与えるマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ となっているわけである．

このようなマザー・ウェーブレットは実はスケーリング関数から容易に構成することができる．まず，V_{-1} が V_0 の部分空間であることに注意すると，$\phi(t/2)$ ($\in V_{-1}$) は V_0 の正規直交基底である $\phi(t-k)$ を用いて

$$\phi(t/2) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(t-k)$$

のように展開できる．ここに現れる展開係数 h_k は，ウェーブレット理論で最も重要な量の一つでしばしばフィルター係数とも呼ばれる．マザー・ウェーブレット（の一つ）$\psi(t)$ は，この係数を用いて次のような形で与えられることが知られている．

$$\psi(t/2) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(t-k), \qquad g_k = (-1)^k h_{1-k}$$

つまり，MRA がわかればあとは自動的にマザー・ウェーブレットが構成できるわけである．したがって，直交ウェーブレットを作る問題は MRA を作る問

題に帰着されることになる．しかし現在のところ，MRA の組立てにはいわば手作りの部分が多いため，直交ウェーブレットの作成はそれほど容易なことではない．

4.3　Daubechies のウェーブレットと Meyer のウェーブレット

ウェーブレットを考える動機からすれば，実・フーリエの両空間で同時にできるだけ局在しているものが望ましいが，まず基本的には不確定性関係からくる限界があり，さらに先に述べたように正規直交条件からフーリエ空間での広がり（これはなめらかさと直接関係する）と局在性の間に厳しい制限がつくことになる．現在では，いくつかの種類の多重解像度解析とそれらに伴う正規直交ウェーブレットが知られているが，実空間とフーリエ空間での局在の程度で分類すると，次の二つの場合が対照的であろう[注)]．

(1)　Daubechies のウェーブレット（実空間でサポート・コンパクト）[5]

$$\psi(t) \in C^{\lambda(N)}(\boldsymbol{R}), \qquad \lambda(N) \simeq 0.3485N \quad (\text{大きな } N \text{ に対して})$$

$$\operatorname{supp}\psi(t) \subset [-N, N-1]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, t^m dt = 0 \qquad (0 \leq m \leq N-1)$$

(2)　Meyer のウェーブレット（フーリエ空間でサポート・コンパクト）[3]

$$\psi(t) \in C^{\infty}(\boldsymbol{R})$$

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega) \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, t^m dt = 0 \qquad (0 \leq m < \infty)$$

Daubechies のウェーブレットは実空間でサポート・コンパクトという著しい性質をもっている (図1)．ただし，ウェーブレットの微分可能回数を増すとサポートが大きくなり，関数形は左右非対称である．MRA の観点からみた場合，Daubechies のウェーブレットは，フィルター係数 h_k のうちゼロでないものは

注）その他のウェーブレットについては文献［12]，[13]，[14］などを参照されたい．

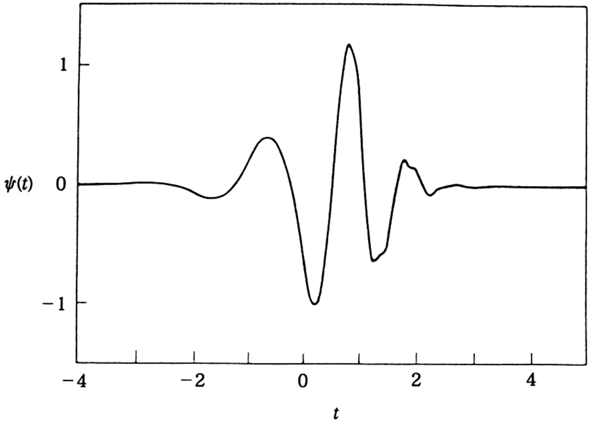


図1　Daubechies のウェーブレット（$N=5$ の場合）

有限個（$2N$ 個）しかない，という顕著な特徴をもっている．この個数によって Daubechies のウェーブレットは分類されることになる．一般的には，N が大きくなると，サポートの大きさが広がり同時に微分可能性も増加する．反対に N を最小にした場合（$N=1$）には，このウェーブレットは Haar ウェーブレットと一致する．

ゼロでない h_k が有限個しかない，という性質は実際の数値計算において非常に有利になる．このことをみるため，先に述べた $\phi(t/2)$, $\psi(t/2)$ と $\phi(t)$ の関係は，一般的に V_{j-1} と W_{j-1} の基底を，V_j の基底で表す関係でもあることに注意しよう．この関係は，もし V_j における展開係数 $c_{j,k}$,

$$P_j f(t) = \sum_{k\in Z} c_{j,k}\phi_{j,k}(t) \qquad (P_j \text{ は } V_j \text{ への射影作用素，} \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t-k))$$

を知っていれば，V_{j-1} と W_{j-1} における展開係数を求めることができることを意味している．たとえば生データ（実用上は 2^N 点など離散点からなるのが普通）を $c_{N,k}$ と同一視すれば，この関係を再帰的に用いることによって積分計算を経由せずに展開係数 $c_{j,k}$ が求められる．そこで，もしこのとき h_k が有限個を残してゼロであれば，$c_{j,k}$ の漸化式は一定項数の有限和になり数値計算上有利になる

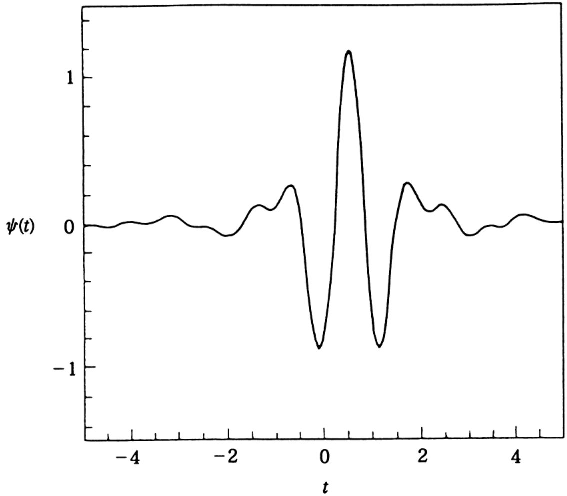


図2　Meyer のウェーブレット

わけである．

ところで，このウェーブレットは Haar ウェーブレットと一致するとき以外は，左右非対称な関数となっている．左右非対称性は，データを右からみた場合と左からみた場合で異なる結果を与えることになるので，利用にあたっては注意が必要である．また，微分演算がからむ問題に用いるときは，小さな N では導関数の振る舞いがあまりよくない（激しく変動する）ので，これも注意が必要である．とはいえ，実空間におけるサポートがコンパクト，という性質は多くの応用において非常に望ましいものであり，数値解析においてもこのウェーブレット（とくにスケーリング関数）の応用が盛んに研究されている．また，h_k が有限個で切れるという性質は，フィルターとしても定式化の簡潔さからいっても望ましいものである．

一方，Meyer のウェーブレットはフーリエ空間でサポート・コンパクトであり，実空間では急減少かつ無限回微分可能な関数で左右対称形（中心は 1/2）で

ある(図2). これらの性質は, Meyer のウェーブレットがデータ解析の道具として使いやすいものであることを示している. まず, ウェーブレットがフーリエ空間をバンド的に分けることから, フーリエ・スペクトル解析に近い使い方が可能となる. また, なめらかさや対称性がよいことは, データ解析において解析手法に起因する(したがって人為的な)特異性や非対称性を避けられることを意味している. また, このウェーブレットは, Daubechies のウェーブレットの場合のようなフィルター係数 h_k における有利さはもっていないが, やはり高速の数値処理は可能であることを注意しておく [6].

5° ウェーブレットの応用

ウェーブレット解析は, 時刻(場所)と周波数(波数)の同時解析, つまり time-frequency analysis (space-wavenumber analysis) を指向した方法である. 従来のフーリエ解析と比較すると, 周波数の精度を落として時刻の精度を上げた方法ということができる. データ解析の観点からすれば, このような方法のメリットは事象の生起時刻の情報を容易に扱うことができる点にある. ここではいくつかの応用例について簡単に触れる.

まず, 連続ウェーブレット解析では, たとえば時系列を連続ウェーブレット変換し, $\log a$ と b をそれぞれ縦軸と横軸にとって $|T(a, b)|^2$ の大きさを濃淡(あるいはカラー)で描くことが行なわれる [7]. 時系列に細かい変化がみられる所には高い周波数成分が現れ, およそのところ直観と矛盾しない描像が得られる. これはちょうど音楽と楽譜の関係に似ている(楽譜の縦軸は周波数の対数). このようにして描かれた図に現れるパターンを用いて音や声などを分類・解析したり, 特定のパターンに注目し, その生起時刻や生起頻度, あるいは他のパターンの出現との関係などを調べることが行なわれる. ただし, 連続ウェーブレット変換が過剰完全基底による展開であることから, このようなパターンのいくぶんかはもとの時系列の属性によるものではなく解析方法に起因するものであることに注意しなければならない(たとえば同じスペクトル密度をもつ

確率過程を計算機で生成し解析結果を比較してみることも場合によっては必要となる).

連続ウェーブレット変換の基底の過剰完全性の性質は逆手にとることもできる．たとえば，データ $f(t)$ を送る代わりにその連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ を送ったとすると，伝送経路で雑音が紛れ込む場合，受け手に届く信号は雑音によって汚された信号 $\widetilde{T}(a, b)$ となる．そこで，$\widetilde{T}(a, b)$ から本来の $T(a, b)$（に近いと思われるもの）を得ることが問題になる．ところで，$T(a, b)$ は3.2節に述べたように，一次従属関係をみたしている．この関係に現れる積分作用素は，2変数 a, b の二乗可積分（測度 $\frac{1}{a^2}da\,db$）な関数の作る空間の中の直交射影作用素である．そこで，$\widetilde{T}(a, b)$ にこの積分作用素を施して得られる関数

$$T_{\mathrm{approx}}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(a, b\,; a', b')\,\widetilde{T}(a', b')\,\frac{1}{a'^2}\,da'\,db'$$

を本来の信号 $T(a, b)$ の近似として用いることができる．これは基底の過剰完全性に由来する $T(a, b)$ の冗長性を利用して雑音の除去を行なう方法である [8].

また，連続ウェーブレット変換は，与えられたデータ（関数）$f(t)$ の特異性の強度の程度を検出する道具としてしばしば用いられる．いま $f(t)$ が $t = t_0$ のまわりで

$$|f(t) - f(t_0)| \sim A(t - t_0)^{\lambda} \qquad (t \to t_0,\ A \text{ は定数} \neq 0)$$

のように振る舞うとき，λ は $t = t_0$ における特異性の強度（ヘルダー指数）と呼ばれる．このとき連続ウェーブレット変換は

$$T(a, t_0) = O(a^{\lambda + 1/2}) \qquad (a \to 0)$$

となるため，$f(t)$ の特異性の強度は $T(a, b)$ の振る舞いを調べることで検出することができる．この性質は多くのフラクタル図形やマルチフラクタル測度の特徴を調べるために用いられている [9]．また，流体乱流中における速度変動をこの方法で解析し，数千点における特異性強度を求めてその分布の研究が行なわれている [10]．ただ，これらの応用において注意すべきことは，上式のような関係は漸近的にしか成立しないことである．特異性強度を実際に求めるときは，$t = t_0$ における λ を検出するために $T(a, t_0)$ の log-log プロット（あるい

はその等価物）を調べることになるが，ほとんどの場合，グラフが山や谷をもつ振動を伴って直線とならないため，簡単にはベキ則を見いだすことができない．この点を改良するため，ベキ則がはっきりと見えるように（すなわちグラフが直線となるように）analyzing wavelet の形を調整するということも行なわれる [11].

直交ウェーブレット変換も広く応用されている．もともと MRA の構造は，サブバンド・フィルターの名で知られていたデータの階層化技術を反映しており，データ圧縮などこの技術が応用される分野においては，MRA と直交ウェーブレットは理論的側面においても密接な関連をもっている [4].

また，直交ウェーブレットは展開の収束性における利点をもっている．理論的には，$L^2(\boldsymbol{R})$ での収束はもちろん，analyzing wavelet がある程度のなめらかさと遠方での減衰の速さをもつときは，もっと広く $L^p(\boldsymbol{R})$ $(1<p<\infty)$ やソボレフ空間，ヘルダー空間でも（直交）ウェーブレットが無条件基底となることが知られている．またさらに，関数 $f(t)$ がこれらの空間に属する必要十分条件を展開係数 $\alpha_{j,k}$ の絶対値を用いて与えることも可能である [12], [13]．実用的な面からみると，フーリエ解析では基本となる関数が $\exp(i\omega t)$ という一様に広がった関数であるため，データ $f(t)$ のどこか一点でも連続性が悪い点があれば展開全体の収束性が悪くなったのに対し，直交ウェーブレットによる表現では，ある点での関数値を表現するのに必要な項数は，基底関数が局所化されているために他の点の不連続性の程度にあまり影響されない．したがって標語的にいえば，各点ごとに必要な項数を用意すればよい．この利点は画像や音声のデータ圧縮の技術などに応用可能である．同様の理由から，画像の境界の検出などにも利用される．

直交ウェーブレット変換の特徴は基底が完全正規直交系をなすということで，この結果，データ $f(t)$ のウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ は互いに完全に独立になる．すなわち，ウェーブレット係数の示す内容はすべてもとの $f(t)$ に起因するものであることが保証される．さらにウェーブレット係数とフーリエ・スペクトルとの相性は悪くない．たとえば Meyer のウェーブレットの場合，$\alpha_{j,k}$ とフー

リエ・スペクトル $E(\omega) \equiv \dfrac{1}{2\pi}|\hat{f}(\omega)|^2$ との間には，適当な仮定のもとに

$$E(\omega) \sim \omega^{-p} \leftrightarrow E_j \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_{j,k}|^2 \sim 2^{-(p-1)j}$$

が成り立ち，いろいろな応用が可能である [6].

一例として，異なる事象の混合からなる時系列を考える．いま，A, B 二つの事象があって，それぞれが異なるベキ則のフーリエ・スペクトルをもつとする．時系列中に A と B のどちらか一方しかないのならば明瞭なベキ則が得られるが，A と B が混在しているときにはフーリエ・スペクトルは明瞭なベキ則を示さなくなる．しかし，このような混合事象でも，時系列を時間とスケールの（2次元の）平面上に展開（すなわちウェーブレット変換）すると，適当な判定基準を用いてそれぞれの事象に分離することが可能な場合がある．これはウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ を A, B 二つのグループに分けることに相当する．このような分離が可能であれば，与えられた時系列中に A と B の事象がどれくらいの割合で含まれるか，またエネルギーはどのように分割されているか，などを議論することができる．またここで，A を理想的な事象，B を雑音とすれば，A と B の分離は，汚れたデータからの雑音の除去にほかならない [6], [16].

また直交ウェーブレットも連続ウェーブレットと同様，データの局所的な相似性の検出に利用できる．たとえば，直交ウェーブレットが適当ななめらかさと減衰の速さをもつとき，データ $f(t)$（$\in L^1(\boldsymbol{R})$ ならよい）が $t = t_0$ において α 位のヘルダー連続（$0 < \alpha \leq 1$）であるとすると，直交ウェーブレットの展開係数 $\alpha_{j,k}$ は

$$|\alpha_{j,k}| \leq C\,2^{-j(\alpha+1/2)}(1+|2^j t_0 - k|^{\alpha}) \qquad (C \text{ は定数})$$

となることを示すことができる（またある意味でこの逆に相当する命題も証明されている）．この性質は，展開係数 $\alpha_{j,k}$ が $f(t)$ の差分 $f(t_0+h) - f(t_0)$ と密接に関係することを意味しており，マルチフラクタルの解析などへの応用を示唆している [6], [15], [17].

なお，ウェーブレットは微分演算子との相性が悪い点で，フーリエ解析の場合の $\exp(i\omega t)$ と対照的である．このため，ウェーブレットを微分方程式の数値

解法に用いることは難しい．これまでの方法にとって代わるためには計算速度または記憶容量が従来のものより有利でなければならないが，まだ決定的な成功を納めているようにはみえない．

二つの点に関して補足しておく．

(1) 多次元化．直交ウェーブレットに関しても多次元への拡張は比較的形式的に行なえる．詳しくは触れないが，たとえば2次元の場合には

$$\{\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)\mid j,k,k'\in \boldsymbol{Z}\}\cup\{\psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y)\mid j,k,k'\in \boldsymbol{Z}\}$$
$$\cup\{\phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)\mid j,k,k'\in \boldsymbol{Z}\}$$

のように $3\,(=2^2-1)$ 種類の積のもの全部を併せて正規直交ウェーブレットが形成される．3次元の場合には $2^3-1=7$ 種類が必要である [2].

(2) ウェーブレットの拡張．直交ウェーブレットはさまざまの制限があり，それがウェーブレットの形を選ぶ自由度を減少させている．そこでこのような自由度を回復する目的で，ウェーブレットの直交性の条件をはずした双直交ウェーブレットが開発されている [2]．この種のウェーブレットとして，たとえば実空間でコンパクト・サポートをもちしかも左右対称形であるもの（これは通常のウェーブレットでは不可能）などが作られている．また，標準的な直交ウェーブレットは再帰的に「低周波域」のみを2分割する方法を与えるが，より一般的に「高周波域」の分割も組み合わせて用いれば，データ解析や情報圧縮に効果があるのではないか，と期待される．このような方法を実現するウェーブレットは「ウェーブレット・パケット」と呼ばれ，音響解析などに用いられている [14], [18], [19].

6° おわりに

以上，ウェーブレットの性質と応用について述べてきた．やや逆説めいた言い方になるが，ウェーブレットの研究が盛んになった大きな理由の一つは，ウェーブレットがそれ以前から知られていたものとそれほど大きく異なる概念で

はなかったことにある．電気工学の分野ではサブバンド・フィルター，時系列データ解析の分野では Gabor 変換や窓付きフーリエ変換，また物理学ではコヒーレント状態，数学では Calderon の公式や無条件基底の理論，などがすでに議論され実用に供されていた．ウェーブレットはこれらの理論や応用における多くの概念の延長線上に位置している．それぞれの分野であらかじめある程度準備された素地があったため，多くの人々が研究に参入することになったのである．ウェーブレットは，数学・物理学・工学など理論・応用のさまざまな分野において従来から用いられてきた伝統的手法を統合する位置にある．この意味でウェーブレットはまさに応用数学のなかで生まれ育った概念といえるだろう．さらに従来の枠を越えるような理論・応用が現れることを期待したい．

参考文献

以下に掲げる文献は本稿を書くに際して参考にしたものにすぎず，完全を期したものではないことをお断りしておく．なおこれらのうち，[7]，[12]，[13]，[14]，[20]，[22] などはまとまった成書であり，その他 [2]，[8]，[9]，[21]，[22]，[23]，[24] がモノグラフ・解説記事などである．

[1] J. Morlet et al., *Geophysics*, **47** (1982), 203.

[2] A. Grossman and J. Morlet, *Mathematics + Physics* (ed. L. Streit), vol. 1, World Scientific, 1985, p. 135.

[3] Y. Meyer, Seminaire Bourbaki, 1985 − 1986, no. 662.

[4] S. Mallat, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315** (1989), 69.

[5] I. Daubechies, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **XLI** (1988), 909.

[6] M. Yamada and K. Ohkitani, *Prog. Theor. Phys.* **86** (1991), 799 ; *Fluid Dyn. Res.* **8** (1991), 101 ; *Prog. Theor. Phys.* **83** (1990), 819.

[7] J. M. Combes et al. eds., *Wavelets*, Springer, 1989.

[8] 佐藤雅昭，ウェーブレット理論の数学的基礎，第1部，日本音響学会誌，**47-6** (1991)，405．第2部，日本音響学会誌，**47-6** (1991)，416．

[9] A. Arneodo et al., in *Nonlinear Dynamics*, ed. G. Turchetti, World Scientific, 1989, p. 130.

[10] E. Bacry et al., in *Turbulence and Coherent Structure*, Kluwer, eds. M. Lesieur and O. Metais, 1990.

[11] R. Benzi and M. Vergassola, *Fluid Dyn. Res.* **8** (1991), 117.

[12] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS 61, SIAM, 1992.

[13] Y. Meyer, *Ondelette et Operateurs*, I-III, Hermann, 1990.

[14] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992. (邦訳：ウェーブレット解析入門，桜井 明・新井 勉訳，東京電機大学出版局，1993.)

[15] S. Jaffard, in *Wavelets-Mathematics and Applications*, eds. J. J. Benedetto and M. W. Frazier, 1994, p. 467.

[16] M. Yamada et al., 京都大学防災研究所年報，**33 b** (1990), 285.

[17] M. Yamada et al., in *Unstable and Turbulent Motion of Fluid*, ed. S. Kida, World Scientific, 1993, p. 188.

[18] R. Coifman et al., in *Wavelets and their Applications*, eds. M. B. Ruskai et al., Jones and Bartlett, 1992.

[19] M. V. Wickerhauser, Picture compression by best-basis sub-band cording, preprint, Yale Univesity.

[20] Y. Meyer ed., *Wavelets and Applications*, Masson-Springer, 1991.

[21] M. Farge, *Ann. Rev. Fluid Mech*. **24** (1992), 395.

[22] J. J. Benedetto and M. W. Frazier eds., *Wavelets-Mathematics and Applications*, CRC Press, 1994.

[23] 山口昌哉・山田道夫，科学，岩波書店，1990年5月号，p. 398.

[24] 数理科学（特集「ウェーブレット」），サイエンス社，1992年12月号.

[25] ウェーブレット技術セミナー講習会テキスト，三菱総研，1992年および1993年.

編者　江沢　洋（えざわ・ひろし）――学習院大学理学部物理学教室

著者　一瀬　孝（いちのせ・たかし）――金沢大学理学部数学教室
上野喜三雄（うえの・きみお）――早稲田大学理工学部数学教室
大森英樹（おおもり・ひでき）――東京理科大学理工学部数学教室
国場敦夫（くにば・あつお）――東京大学大学院総合文化研究科
黒田耕嗣（くろだ・こうじ）――日本大学文理学部数学教室
河野俊丈（こうの・としたけ）――東京大学大学院数理科学研究科
近藤慶一（こんどう・けいいち）――千葉大学理学部物理学教室
中神祥臣（なかがみ・よしおみ）――横浜市立大学文理学部数学教室
野海正俊（のうみ・まさとし）――神戸大学理学部数学教室
村井信行（むらい・のぶゆき）――中京大学教養部物理学教室
山田道夫（やまだ・みちお）――東京大学大学院数理科学研究科

数理物理への誘い――最新の動向をめぐって

1994年6月21日　第1版第1刷発行
1997年2月24日　第1版第2刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　江沢　洋
発行者　西原昌幸
発行所　遊星社
〒164 東京都中野区中野3－50－1
電話（03）3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星雲社
〒112 東京都文京区小石川5－19－25
電話（03）3947-1021　FAX（03）3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN4-7952-6875-4